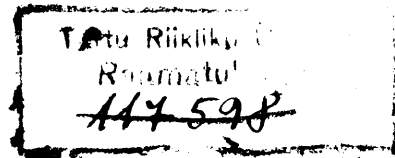


EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE
U N T E R S U C H U N G E N
UEBER DIE
GESETZE
DER
DOPPELTEN STRAHLENBRECHUNG
UND
POLARISATION DES LICHTS
IN DEN KRYSTALLEN DES ZWEI- UND EINGLIEDRIGEN
SYSTEMS,

VON

Dr. CARL EDUARD SENFF,

PRIVATDOCENTEN AN DER KAISERLICHEN UNIVERSITAET ZU DORPAT.



DORPAT, bei C. A. Kluge.

Gedruckt bei J. C. Schünmann, Universitätsbuchdrucker.

1837.

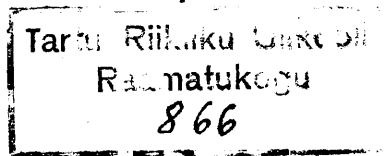
Der Druck ist gestattet.

Jedoch müssen nach bewerkstelligtem Druck fünf Exemplare dem Zensur-Comité eingesandt werden.

Dorpat, den 23. Jan. 1837.

Zensor F. PARROT.

4. XII. B



VORWORT.

Obgleich die vorliegenden Untersuchungen, die ich hiermit der öffentlichen Kenntniss übergebe, schon vor drei bis vier Jahren angestellt worden sind, so haben doch besondere Umstände dahin gewirkt, ihre Bekanntmachung durch den Druck bisher zu verzögern. Den experimentellen Theil der Untersuchungen nämlich hatte ich schon während meines Aufenthaltes in Königsberg vollendet. Bei der Bearbeitung desselben, die ich hierselbst nach meiner Rückkehr unternahm, machte ich jedoch die Bemerkung, daß die auf die Polarisation sich beziehenden Beobachtungen durchgehends mit einem durch ein Versehen veranlaßten Fehler behaftet seien, und sah mich somit genöthigt, diese ganze Reihe von Beobachtungen, welche fast zu den schwierigsten und mühsamsten Untersuchungen der experimentellen Physik gehören, zu wiederholen, was um so zeitraubender für mich war, als die dazu erforderlichen Apparate alle von Neuem zusammengesetzt werden mußten. Die neue Sphäre der Thätigkeit, welche sich mir hierauf an unserer Universität eröffnete, vereint mit andern Verpflichtungen, liefs mir bisher nicht soviel Musse, die letzte Hand an die Arbeit zu legen, um sie zum Drucke zu befördern.

Wenn demnach diese Arbeit, als eine zu spät das Licht der Welt erblickende, Vieles von ihrem Interesse verloren haben mag, indem die zur Zeit ihres Entstehens noch neue Frage über die Differenz zwischen den optischen Erscheinungen in den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems und denen des zwei- und zweigliedrigen (ein- und einaxigen, prismatischen) jetzt schon von mehreren Seiten her erörtert worden ist, so hoffe ich doch, daß sie nicht ganz ohne wissenschaftliche Bedeutung sein wird, da einerseits diese Frage noch längst nicht entschieden ist, und na-

mentlich die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und Polarisation in den zwei- und eingliedrigen, so wie auch in den ein- und eingliedrigen Krystallen, noch sehr wenig erforscht sind; andererseits aber alle numerischen Bestimmungen in jedem Gebiete der Naturlehre, wenn sie auf genaue Messungen gegründet sind, an sich einen entschiedenen Werth haben.

Es könnte mir zum Vorwurf gereichen, daß ich diese Beobachtungen, welche über die optischen Eigenschaften der Krystalle des zwei- und eingliedrigen Systems im Allgemeinen Aufschluß geben sollten, an dem Eisenvitriol allein angestellt habe. Dagegen muß ich bemerken, daß diese Arbeit durchaus nicht Anspruch macht, für eine abgeschlossene und vollendete zu gelten, sondern vielmehr nur als erstes Glied einer Reihe von Untersuchungen auftritt, die dann erst als abgeschlossen angesehen werden kann, wenn dieselben Untersuchungen (wo möglich noch verbunden mit denen über die termischen Eigenschaften) auf eine bedeutende Anzahl zu demselben Krystallsystem gehöriger Fossile ausgedehnt worden sind, so daß man die allgemeinen, für diese Classe von Krystallen geltenden Gesetze der optischen Erscheinungen aus ihnen ableiten kann. Diese Weiterführung der Untersuchung wird, sobald Musse dazu vorhanden ist, erfolgen.

In der vorliegenden Schrift hatte ich vorläufig nur die Absicht, eine Darstellung der Methoden zu geben, welche ich bei meinen krystallographischen und optischen Beobachtungen befolgt habe, und zugleich eine mathematische, auf die Principien der Undulationstheorie und die Eigenschaften der Krystalle gegründete Betrachtung daran anzuschliessen, deren Resultate uns dazu führen, eine Abweichung in den Gesetzen der optischen Erscheinungen bei den Krystallen des genannten Systems von den bisher für allgemein geltenden Gesetzen anzunehmen, und uns überdies die Fingerzeige geben, auf welche Punkte wir bei den weiteren experimentellen Untersuchungen unsere Aufmerksamkeit zu richten haben.

So übergebe ich denn diese Arbeit dem Urtheile der Sachkundigen, in der Zuversicht, daß das zu ihrer Rechtfertigung hier Angeführte mich auf ihre Nachsicht hoffen läßt.

Der Verfasser.

EINLEITUNG.

Die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und der damit verbundenen Polarisirung des Lichts, welche Fresnel (1) auf theoretischem Wege aufgestellt, und deren Uebereinstimmung mit den Erscheinungen sich an den darüber angestellten Beobachtungen auf so glänzende Weise bewährt hat, sind bisher noch an keiner einzigen krystallinischen Substanz geprüft worden, die dem zwei- und eingliedrigen Systeme angehört. Es ist gewiss nicht zu bezweifeln, dass die innere Structur einer solchen Substanz, ihrer äusseren Form entsprechend, eine unsymmetrische ist, und daher auch die Elasticitätskräfte, welche bei den Undulationen des Lichtäthers wirksam sind, so von der Richtung, in welcher sie hervorgerufen werden, abhängen, dass sie nicht in Richtungen, welche in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem symmetrisch liegen, dieselben sind, wie dieses bei den Krystallen des zwei- und zweigliedrigen (prismatischen) Systems der Fall ist. Nach den Betrachtungen, welche Fresnel seiner Theorie zum Grunde legt, hat nun allerdings die Structur einer krystallinischen Substanz, die sich nach drei rechtwinkligen Richtungen verschieden verhält (oder die zu den drei letzten Systemen gehört), wenn sie nur homogen, das heisst jeder Theil derselben mit dem andern identisch ist, im Uebrigen keinen Einfluss auf die Gesetze der Lichtbrechung, woraus also hervorgehen würde, dass diese auch bei den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems (ja selbst bei denen des ein- und eingliedrigen) ganz mit der Fresnel'schen Theorie übereinstimmend sein müssten. Es ist jedoch schon auf theoretischem Wege von Neumann in seiner Abhandlung über die Theorie der doppelten Strahlenbrechung (2) erwiesen worden, dass die Betrachtungen, von denen Fresnel ausgeht, manches Hypothetische enthalten, und sich aus einer strengeren, auf die Fundamen-

(1) Memoires de l'Academie de Paris. Tom VII. 1824.

(2) Poggendorfs Annalen 1832. B. XXV.

talgleichungen der Mechanik gegründeten Entwicklung ergibt, daß die Abhängigkeit der Elasticitätskräfte von der Richtung, in welcher sie hervorgerufen werden, sehr wohl einen Einfluß auf die Gesetze der Strahlenbrechung hat, und selbst in Krystallen des zwei- und zweigliedrigen Systems die Art dieser Abhängigkeit noch bestimmten Bedingungen unterworfen werden muß, wenn die Fresnel'schen Gesetze der Brechung gelten sollen. Bei der optischen Untersuchung einer krystallinischen Substanz des zwei- und eingliedrigen Systems handelt es sich also darum, auch auf dem Wege der Erfahrung zu entscheiden, ob die der Fresnel'schen Theorie zum Grunde gelegten Betrachtungen statthaft sind oder nicht. Es ist freilich in dem Falle, daß sich die an dieser einen Substanz angestellten Beobachtungen ganz den Fresnel'schen Gesetzen anschliessen, noch nichts entschieden, indem die Abweichungen gerade bei dieser Substanz so gering sein können, daß sie der Beobachtung entgehen; aber gewiß ist, daß wenn sich Abweichungen von den Fresnel'schen Gesetzen finden, dieses entscheidend ist. — Da es hier, wie sich erwarten läßt, nur auf sehr kleine Größen ankommt, so mußten die Beobachtungen mit möglichster Genauigkeit angestellt werden, und ich habe mich bemüht, in dieser Beziehung zu erreichen, was die mir zu Gebote stehenden Hülfsmittel und die Eigenschaften der Substanz, welche ich der Untersuchung unterwarf, erlaubten.

Die Erforschung der physischen Eigenschaften eines Krystalls setzt die Bestimmung seiner krystallographischen Eigenschaften voraus, welche also zuerst von mir unternommen werden mußte. Demnach zerfällt diese Schrift in drei Theile: der erste enthält die krystallographischen, der zweite die optischen Beobachtungen am Eisen-
vitriol, der dritte die theoretische Untersuchung über die Gesetze der optischen Erscheinungen an den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems im Allgemeinen.

ERSTER THEIL.

Krystallographische Beobachtungen am Eisenvitriol.

§ 1. Ich erlaube mir, diesen Theil mit etwas größerer Ausführlichkeit zu behandeln, als der Zweck der ganzen Untersuchung es unbedingt erheischt, indem ich ihm einige allgemeinere krystallographische Bemerkungen beifüge. Bei Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems nämlich, zu denen der Eisenvitriol gehört, so wie bei denen des ein- und eingliedrigen (oder des hemiprismatischen und tetartoprismatischen) haben genaue Winkelmessungen, an irgend einem Mineral ausgeführt, schon an sich ein bedeutendes Interesse für die Krystallographie, indem sie einen Beitrag liefern zur Entscheidung der wichtigen Frage, ob bei diesen beiden Krystallsystemen die Annahme eines rechtwinkligen krystallographischen Axensystems zulässig sei, das heisst, die Annahme dreier auf einander rechtwinkliger Axen, auf welche bezogen die Zeichen der Krystallflächen nach der Weifs'schen Bezeichnungsart durch einfache rationale Zahlen darstellbar sind. Soll dieses Statt finden, so muß das Axensystem die Eigenschaft haben, daß wenn man sich alle Krystallflächen durch einen und denselben Punkt einer der Axen gelegt denkt (versteht sich, ihrer natürlichen Lage parallel), die von vieren dieser Flächen auf jeder der beiden andern Axen abgeschnittenen Stücke unter sich in einfachen rationalen Verhältnissen stehen (die Verhältnisse 0 und ∞ mit eingeschlossen), indem vermöge des Zonenzusammenhangs dann dasselbe auch für alle übrigen Flächen des Krystalls gilt. Der Grundverhältnisse sind also im allgemeinsten Falle sechs, drei zwischen den vier Stücken der einen Axe, drei zwischen denen der andern, d. h. bei dem ein- und eingliedrigen Systeme, denn die übrigen Systeme sind in mathematischer Beziehung nur als specielle Fälle dieses zu betrachten. Bei dem zwei- und eingliedrigen Systeme z. B., wo man natürlich immer die den Krystall symmetrisch theilende Ebene zu einer Hauptebene des

Axensystems nimmt, reducirt sich die Zahl der Grundverhältnisse auf zwei, die übrigen werden 0 oder ∞ .

§ 2. Dieser Satz, auf dem eigentlich die ganze mathematische Theorie der Krystallographie beruht, läßt sich sehr einfach darthun. Zuzufolge des Zonengesetzes nämlich, das als Grundprincip aller krystallinischen Bildung angesehen werden muß, lassen sich alle an einer Krystallform vorkommenden Flächen aus vier gegebenen unter ihnen auf die Weise ableiten, daß jede neu hinzukommende Fläche zwei von den Durchschnittslinien enthalten muß, welche von den schon vorhandenen Flächen gebildet werden, wobei die Flächen alle durch einen Punkt gehend gedacht sind. Nehmen wir nun ein im Allgemeinen schiefwinkliges Axensystem an, legen die vier ursprünglich gegebenen Flächen durch einen Punkt der Axe z , und bezeichnen die Stücke, welche die eine Fläche von den beiden Axen x und y abschneidet, respectiv mit a und b , dieselben Stücke für die übrigen drei Flächen mit $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}; \frac{a}{m'}, \frac{b}{n'}$ und $\frac{a}{m''}, \frac{b}{n''}$, so werden die Gleichungen der 4 Durchschnittslinien, welche diese Flächen mit der Hauptebene xy bilden, diese sein:

$$\begin{aligned} A = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 &= 0, & B = \frac{mx}{a} + \frac{ny}{b} - 1 &= 0, \\ C = \frac{m'x}{a} + \frac{n'y}{b} - 1 &= 0, & D = \frac{m''x}{a} + \frac{n''y}{b} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Es kommt jetzt nur darauf an, die Gleichung einer Linie zu finden, welche durch irgend zwei von den Durchschnittspunkten geht, die jene vier Linien unter einander bilden, denn eine solche ist die Durchschnittslinie einer neuen Krystallfläche mit der Ebene xy . Bekanntlich ist nun die Gleichung einer graden Linie, die durch den Durchschnittspunkt der Linien $A = 0$ und $B = 0$ geht, von der Form $A + \lambda B = 0$, wo λ eine unbestimmte Constante bezeichnet, oder, was dasselbe ist, von der Form:

$$(1 - \lambda) A + \lambda B = 0$$

und geht sie zugleich durch den Durchschnittspunkt der Linien $C = 0$ und $D = 0$, auch von der Form:

$$(1 - \mu) C + \mu D = 0.$$

Die Constanten λ und μ werden dadurch bestimmt, daß man die Coefficienten von $\frac{x}{a}$ und die von $\frac{y}{b}$ in beiden Gleichungen einander gleich setzt. Hieraus gehen die Gleichungen

$$1 - \lambda + m\lambda = m'(1 - \mu) + m''\mu \quad \text{und} \quad 1 - \lambda + n\lambda = n'(1 - \mu) + n''\mu$$

hervor, welche in λ und μ linear sind, und also unter der Voraussetzung, daß die Größen m, n, m' etc. rationale Zahlen sind, auch für λ und μ rationale Werthe geben. Da nun durch die Substitution dieser Werthe die Gleichung der neu hinzugekommenen Linie von der Form $\frac{px}{a} + \frac{qy}{b} - 1 = 0$ wird, wo p und q rationale Zahlen sind, so haben auch die Stücke, welche von der zu dieser Linie gehörigen, nach dem Zonengesetze abgeleiteten Krystallfläche auf den beiden Axen abgeschnitten werden, nämlich $\frac{a}{p}$ und $\frac{b}{q}$ rationale Verhältnisse zu a und b , was zu beweisen war. Derselbe Beweis gilt natürlich auch für jede folgende nach demselben Gesetze abgeleitete Fläche, und es versteht sich von selbst, daß es in mathematischer Beziehung gleichgültig ist, welche vier Krystallflächen ursprünglich gegeben sind, wenn nur nicht drei derselben schon in einer Zone liegen.

§ 3. Aus diesem Satze lassen sich nun verschiedene Folgerungen unmittelbar ableiten. Erstens, daß jede 3 krystallographische Linien, d. h. an der Krystallform wirklich vorhandene oder nur mögliche Kanten oder Durchschnittslinien zweier Flächen, ein krystallographisches Axensystem bilden, indem es hier nur auf die Richtung der Axen, nicht auf den Ort derselben ankommt. Denn da die Hauptebenen eines solchen Axensystems dreien Krystallflächen parallel sind, so werden für diese die Grundverhältnisse m, n, m', n', m'', n'' alle gleich 0 oder ∞ , und irgend eine vierte Krystallfläche giebt die Stücke a und b . Jede andere Krystallfläche muß also, indem sie sich mit jenen vierten im Zonenzusammenhange befindet, von den Axen x und y Stücke abschneiden, die in rationalen Verhältnissen zu a und b stehen. — Ebenso ergibt sich auch aus jenem Satze, wie viel Winkel wenigstens an einem Krystall gemessen sein müssen, um ihn vollständig zu bestimmen. Läßt man nämlich das Axensystem ein rechtwinkliges sein, und wählt dieses so zweckmäfsig, als die Natur der Krystallform es zuläßt, damit möglichst viele von den 6 Grundverhältnissen $= 0$ oder ∞ werden, so geben uns die übrigbleibenden Constanten, mit Einschluss von a und b , die Zahl der zu messenden Winkel. Bei den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems, wo man eine augitartige Zuschärfungsfläche, zwei schiefe Endflächen und die den Krystall symmetrisch theilende Ebene als ursprünglich gegeben ansehen, und letztere nebst einer der schiefen Endflächen zu Hauptebenen des Axensystems wählen kann, werden 5 der Größen m, n, m' etc. $= 0$ oder ∞ , und es werden also 3 gemessene Winkel zur Be-

stimmung des Krystalls genügen. Beim ein- und eingliedrigen Systeme kann man das Axensystem nicht vortheilhafter wählen, als eine der 4 gegebenen Krystallflächen zu einer Hauptebene und eine in ihr liegende Kante zu einer Axe, dadurch werden 3 der Grundverhältnisse $= 0$ oder ∞ , und es sind also 5 Winkelmessungen bei den Krystallen dieses Systems erforderlich.

§ 4. Der Satz, daß jede 3 krystallographischen Linien ein krystallographisches Axensystem bilden, zeigt, daß die Möglichkeit schiefwinkliger Axensysteme eine nothwendige Folge des Zonengesetzes ist, sich darin also durchaus kein neues Naturgesetz ausspricht, und daß überdies in der Annahme eines bestimmten Axensystems etwas Willkürliches liegt. Der Herr Akademiker Kupfer, der ebenfalls diesen Satz in einer Abhandlung über den Kupfervitriol (1) analytisch bewiesen hat, macht dabei die Bemerkung, daß sich aus demselben auch die Möglichkeit rechtwinkliger Axen ergebe, indem es durch wiederholte Ableitung immer möglich sei, 3 krystallographische Linien zu finden, die nahezu auf einander senkrecht wären. Es ist aber wohl leicht einzusehen, daß für Flächen, die durch eine vielfach wiederholte Ableitung entstanden sind, die Verhältniszahlen nicht einfach bleiben werden. Wenn jedoch die Ableitung rechtwinkliger krystallographischer Linien aus den vorhandenen Krystallflächen sehr nahe liegt, oder obgleich sie verwickelt ist, dennoch auf einfache Verhältnisse führt, so scheint sich mir jedenfalls in der Möglichkeit rechtwinkliger Axen ein neues, von dem Zonengesetze unabhängiges Naturgesetz auszusprechen, welches freilich in der Natur noch nicht hinreichend nachgewiesen, aber doch durch mehrere Beispiele wahrscheinlich gemacht ist. Wenn ferner der Herr Akademiker Kupfer in einer späteren Abhandlung (2) die Annahme rechtwinkliger Axensysteme darum für unpassend erklärt, weil durch die Wahl schiefwinkliger Axen die Flächenausdrücke immer noch einfacher gemacht werden können, und dieses an mehreren Beispielen zeigt, so scheint mir dagegen einzuwenden, daß es auf die etwas größeren oder kleineren Zahlen in den Flächenzeichen nicht ankommt, wenn sie nur nicht so groß sind, daß sie bloß als Annäherungen an irrationale Verhältnisse erscheinen. Es versteht sich von selbst, daß wenn man nur das eine Gesetz des Zonenzusammenhangs beach-

(1) Poggendorfs Annalen 1826, B. VIII.

(2) Ebendasselbst 1828, B. XIII.

tet, man die Flächenausdrücke muß noch einfacher machen können, als wenn man auch dem Gesetze der Rechtwinkligkeit der Axen genügen will. Es ist aber die Beziehung auf rechtwinklige Axen an und für sich ihrer Idee nach eine einfachere, indem ein Element, nämlich die Abweichung der Axe, durch sie ganz verschwindet, ja bei dem ein- und eingliedrigen Systeme sogar 3 Elemente, die 3 Winkel, welche die Axen mit einander bilden; so daß durch die Flächenzeichen allein bei rechtwinkligen Axen schon die Lage aller Flächen, also die ganze Krystallform, gegeben ist, während bei den Zeichen, die sich auf schiefwinklige Axen beziehen, immer noch die Winkel zwischen den Axen besonders gegeben werden müssen, indem die Zeichen an und für sich nichts weiter als den Zonenzusammenhang der Flächen aussprechen. Wenn es durch die Wahl schiefwinkliger Axen möglich wäre, alle Krystallformen des zwei- und eingliedrigen und des ein- und eingliedrigen Systems zu homöedrischen zu machen, was mathematisch denkbar ist, so würde dadurch Bedeutendes gewonnen sein, und in krystallographischer Beziehung das Uebergewicht entschieden auf Seiten der Annahme schiefwinkliger Axen liegen, obgleich die physischen Eigenschaften der Krystalle immer für rechtwinklige sprechen. Allein die Formen der beiden genannten Krystallsysteme bleiben auch bei der Wahl schiefwinkliger Axen immer hemiedrische, zu denen die homöedrischen nicht existiren. Ich will mich jedoch für jetzt der weiteren Bemerkungen über diesen Gegenstand enthalten, denn ich werde am Schlusse des zweiten Theils dieser Abhandlung, nach Darlegung meiner optischen Untersuchungen über den Eisenvitriol, darauf zurückkommen, indem es mir gelungen ist, auch bei diesem Mineral mit nicht geringer Wahrscheinlichkeit ein rechtwinkliges, und zwar wenig von dem optischen abweichendes, krystallographisches Axensystem nachzuweisen.

§ 5. Nach Haüy, der den Eisenvitriol noch zum rhomboedrischen Systeme rechnete, ist Mohs der einzige, welcher bisher Krystallwinkelmessungen an demselben gemacht hat. Ich muß dieses wenigstens daraus schließen, daß die in seinem Grundriß (Th. II. S. 51) enthaltenen Winkelangaben in alle Lehrbücher der Mineralogie übertragen sind, sogar mit den in ihnen vorkommenden Druck- oder Rechnungsfehlern. Ich werde mich daher in der Bezeichnung der Flächen durch Buchstaben nach Mohs richten. Fig. I. stellt einen Krystall des Eisenvitriols vor, an dem alle über-

haupt vorkommenden Flächen vorhanden sind; u ist die ihn symmetrisch theilende Fläche. Mohs hat dem Krystalle die Stellung gegeben, daß die Kante f der vordern Säulenkante, also der Axe c , parallel ist, und b die gerade Endfläche oder die Hauptebene ab ; P ist sein Grundprisma. Er hat demnach ein schiefes Axensystem, dessen Axe c seiner Angabe nach die Abweichung $14^\circ 20'$ hat, und seine Zeichen

für die Flächen sind folgende: $P - \infty = b$, $\frac{P}{2} = P$, $P + \infty = f$, $\frac{4}{3}\frac{\bar{P}r - 2}{2} = g$.

$\pm \frac{\bar{P}r}{2} = \left(\frac{v}{t}, \bar{P}r = o, \bar{P}r + \infty = u \text{ und } -\left(\frac{\bar{P}r}{2}\right)^3\right)$; die letzte, eine Octaederfläche,

hat er nicht benannt; ich habe sie mit dem Buchstaben k bezeichnet. Den Zonenzusammenhang, welcher zwischen den Flächen obwaltet, wird man am leichtesten aus dem Schema Fig. II. ersehen, welches nach der Methode des Hrn. Professor Neumann entworfen ist, indem jede Fläche durch den Punkt repräsentirt wird, in welchem ein aus dem Mittelpunkte des Axensystems auf dieselbe gefällter Perpendikel die Ebene der Zeichnung, die der Hauptebene ab parallel angenommen ist, schneidet. Für die in einer Zone liegenden Flächen liegen die entsprechenden Punkte auf einem solchen Schema in einer geraden Linie. Das hierbei zum Grunde gelegte Axensystem ist ein rechtwinkliges, und zwar dasjenige, auf welches ich die Flächen zur Ausgleichung der gemessenen Winkel vorläufig bezogen habe. Die Axe c ist der Fläche b parallel, die Axe a steht auf ihr senkrecht. Die Weifs'schen Zeichen der Flächen auf dieses Axensystem bezogen sind folgende, wie Jeder, der mit dieser Methode der Zeichnung vertraut ist, sogleich aus dem Schema entnehmen kann:

$$\begin{array}{ll} b = (\alpha : \infty : \infty) & P = \left(\frac{\alpha}{1+p} : \beta : 1\right) \\ f = (\alpha : \beta : 1) & t = \left(\frac{\alpha}{1-p} : \infty : 1\right) \\ o = \left(\frac{\alpha}{p} : \beta : \infty\right) & k = \left(\frac{\alpha}{1-p} : \frac{\beta}{2} : 1\right) \\ v = \left(\frac{\alpha}{1+p} : \infty : 1\right) & g = \left(\frac{\alpha}{1+3p} : \infty : 1\right) \\ u = (\infty : \beta : \infty) & \end{array}$$

§ 6. Wir wollen nun zu den Winkelmessungen selbst übergehen. Diese sind mit zwei verschiedenen Reflectionsgoniometern angestellt, deren Benutzung ich der Güte des Herrn Professor Neumann in Königsberg verdanke; beide Instrumente sind aus der Werkstätte von Pistor und Schiek in Berlin. Das erstere, von älterer Construction, hat einen Kreis von ungefähr 5 Zoll Durchmesser, auf dem Rande getheilt, an dem man mit Hülfe des Nonius 1' ablesen, also 0',5 schätzen kann. Die Methode, welche ich bei den Winkelmessungen angewendet habe, ist folgende. Das Goniometer steht auf einem Brett mit 3 Stellschrauben, und die Axe desselben wird mit Hülfe eines an ihr befestigten Fernrohrs, dessen Sehlinie auf ihr senkrecht ist, horizontal gestellt, indem man das Bild eines in einiger Entfernung befindlichen und möglichst über das Goniometer erhöhten Gegenstandes (etwa einer am oberen Rande des Fensters befestigten Marke) sowohl direct gesehen, als von einem Oelspiegel reflectirt, mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs zusammenfallen läßt. In Ermangelung eines solchen Fernrohrs kann die Horizontalität der Axe auch dadurch hervorgebracht werden, daß ein Stückchen unbelegtes Spiegelglas mit möglichst parallelen Flächen an dieselbe hefestigt wird, und dann durch Stellung der Axe sowohl als des Spiegelglases die von beiden Seiten desselben, also vor und nach einer Umdrehung um 180° , reflectirten Bilder der Marke mit dem vom Oelspiegel reflectirten Bilde derselben zur Coincidenz gebracht werden. Um bei diesem Verfahren von dem höheren oder tieferen Stande des Oelspiegels unabhängig zu sein, muß die Marke so angebracht werden, daß die nach ihr gerichtete Sehlinie auf der Goniometeraxe senkrecht steht. Nachdem hierauf der Krystall an die Goniometeraxe befestigt worden ist, werden die beiden Krystallflächen, zwischen denen der Winkel gemessen werden soll, auf dieselbe Weise mit Hülfe des Oelspiegels und der Marke eine nach der andern horizontal und somit der Goniometeraxe parallel gestellt. Eine gleiche Entfernung von der Goniometeraxe giebt man den Krystallflächen dadurch, daß man sie bei horizontaler Stellung nach dem Augenmaafs in gleiches Niveau mit einem kleinen, dicht neben dem Krystalle aufgestellten Glasspiegel bringt. Dieser Spiegel (der auf der untern Seite mattgeschliffen sein muß, um nicht doppelte Bilder zu geben) dient zugleich zur Einstellung der Krystallflächen bei der Winkelmessung selbst. Er muß nämlich ebenfalls mittelst des Oelspiegels in der Seitenrichtung, d. h. in der

Richtung der Goniometeraxe horizontal gestellt sein, und es wird nun eine Krystallfläche nach der andern durch Drehung des eingetheilten Kreises so eingestellt, daß die Bilder eines horizontal am Fenster aufgespannten Fadens von ihr und vom Spiegel reflectirt coincidiren. Der Unterschied der bei der einen und andern Stellung des Kreises gemachten Ablesungen bestimmt den Winkel zwischen den beiden Flächen.

§ 7. Nach dieser Methode nun habe ich an vielen Eisenvitriol-Krystallen Winkelmessungen angestellt. Ich liefs die Krystalle, welche ich mir selbst bereitete, in der Regel höchstens zu einer Gröfse von einer Linie im Durchmesser anwachsen, da man annimmt, daß die störenden Kräfte, welche nothwendig bei der Krystallisation wirksam sind, bei kleineren Krystallen erst weniger bedeutende Abweichungen hervorgebracht haben. Doch kamen, besonders wenn die Krystallisation etwas zu eilig vor sich gegangen war, sehr häufig Flächen vor, welche doppelte Bilder gaben, und da ich diese natürlich verwarf, so konnte ich selten mehr als ein oder zwei Winkel an ein und demselben Krystall messen. Die Resultate dieser Messungen, so wie die Data zu ihrer Berechnung sind in folgender Tafel enthalten:

	Berechnete Winkel.	<i>L.</i>	<i>m.</i>	<i>n.</i>	Δ .	Gemessene Winkel.	Corrig. Winkel.	Differenz.
bg	20° 53',6	+ 131	0	— 119	+ 2',1	51,5	52,9	+ 1',4
bv	43 48,3	+ 198	0	— 150	+ 3,7	44,6	47,5	+ 2,9
vg	22 54,7	+ 67	0	— 32	+ 1,6	53,1	54,5	+ 1,4
vt	74 18,9	— 362	0	+ 392				
$\frac{oo}{2}$	56 16,7	+ 183	— 183	— 183	— 1,5	$\begin{matrix} 19,0 \\ 17,4 \end{matrix} \Bigg) 18,2$	18,4	+ 0,2
$\frac{ff}{2}$	48 52,0	+ 12	— 195	0	— 4,6	$\begin{matrix} 57,5 \\ 55,7 \end{matrix} \Bigg) 56,6$	55,0	— 1,6
$\frac{PP}{2}$	39 16,4	+ 102	— 194	— 77	— 2,6	19,0	18,9	— 0,1
$\frac{kk}{2}$	64 21,9	+ 35	— 153	— 52				
bf	80 40,5	+ 63	— 37	0	+ 0,2	$\begin{matrix} 39,1 \\ 41,5 \end{matrix} \Bigg) 40,3$	41,1	+ 0,8
go	58 45,5	+ 197	— 165	— 195	— 0,2	$\begin{matrix} 44,6 \\ 46,8 \end{matrix} \Bigg) 45,7$	46,9	+ 1,2
gf	67 44,6	— 16	— 93	+ 69	— 1,0	45,6	46,4	+ 0,8
vo	66 22,8	+ 203	— 120	— 183	— 2,3	$\begin{matrix} 23,3 \\ 26,9 \end{matrix} \Bigg) 25,1$	23,6	— 1,5
vf	56 3,9	— 34	— 151	+ 63	— 2,3	$\begin{matrix} 5,8 \\ 6,6 \end{matrix} \Bigg) 6,2$	6,6	+ 0,4
to	74 49,9	+ 158	— 75	— 198				
tf	60 55,5	— 125	— 125	+ 124				
fo	44 14,6	— 34	+ 200	+ 74	+ 2,6	$\begin{matrix} 10,4 \\ 12,5 \\ 13,2 \end{matrix} \Bigg) 12,0$	12,0	0,0
(fo)	122 26,7	+ 169	— 271	— 120	— 6,8	33,5	30,2	— 3,3
oP	33 12,6	+ 74	+ 101	— 65	— 0,6	13,2	10,7	— 2,5
(fk)	61 62,7	+ 15	+ 320	— 9	— 0,8	63,5	57,8	— 5,7

In der ersten Columne sind die Flächen angegeben, von welchen die daneben stehenden Winkel gebildet werden. Die ersten 4 sind Winkel zwischen schiefen Endflächen, die folgenden 4 sind halbe Winkel zwischen zusammengehörigen augitartigen Zuschärfungsflächen, dann folgen 7 Winkel zwischen Endflächen und Zuschärfungsflächen, und die letzten 4 werden von nicht zusammengehörigen Zuschärfungsflächen gebildet. Die beiden in Klammern eingeschlossenen Winkel (fo) und (fk) sind solche, bei denen die Flächen, zufolge der von mir angenommenen Normalstellung des Krystalls, auf verschiedenen Seiten der symmetrisch theilenden Ebene liegen, oder wo in dem Flächenzeichen einer der beiden Flächen der Axe β das Vorzeichen — gegeben werden mufs. Die Winkel νt , $\frac{kk}{2}$, to und tf habe ich erst später an andern Krystallen gemessen, darum sind hier nur die zu ihrer Berechnung erforderlichen Data angegeben. Die zweite Columne enthält die Werthe der Winkel aus den vorläufig angenommenen Elementen:

$$\log \alpha = 0,59494; \quad \log \beta = 9,92763 - 10; \quad \log p = 0,49174$$

berechnet, welche bei der Ausgleichung der gemessenen Winkel nach der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde gelegt sind. Die angegebenen Winkel sind hier, wie auch in der Folge, immer die von den Normalen der Krystallflächen gebildeten, oder die Supplemente der Flächenwinkel zu 180° .

Die 3 mit l , m , n überschriebenen Columnen geben die Veränderungen der Winkel in Minuten, welche respective einer Veränderung von $\pm 0,05$ in den Elementen $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log p$ entsprechen; Δ ist der Unterschied des vorläufig berechneten Winkels vom gemessenen, so dafs die bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für jeden Winkel aufgestellte Gleichung von der Form ist:

$$lx + my + nz + \Delta = 0,$$

wo $0,05 x$; $0,05 y$ und $0,05 z$ die Correctionen der Elemente $\log \alpha$, $\log \beta$ und $\log p$ sind.

Die 7te Columne enthält nun die Winkelmessungen selbst. Die Grade der Winkel habe ich aus Ersparnifs an Raum nicht wiederholt. Wo das Mittel aus zwei oder mehreren an verschiedenen Krystallen angestellten Messungen desselben Winkels genommen ist, habe ich diese einzeln aufgeführt, und durch eine Klammer vom Mittel getrennt. Jede einzelne Winkelangabe ist das Resultat von 5 bis 10 Messungen, die nie über $3'$ von einander abwichen.

Die folgende Columnne enthält die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Winkel, und die letzte Columnne die in den Messungen nachbleibenden Fehler, oder, was dasselbe ist, die kleinsten Correctionen, die an die gemessenen Winkel angebracht werden müssen, damit sie dem Zonenzusammenhange entsprechen.

Einer jeden Gleichung ist darnach ihr Gewicht ertheilt, an wieviel verschiedenen Krystallen der Winkel, zu dem sie gehört, gemessen ist, und die 4 Winkel: $\frac{o o}{2}$, $\frac{f f}{2}$, $\frac{P P}{2}$, $\frac{k k}{2}$, haben ausserdem noch ein doppeltes Gewicht erhalten. Die hieraus hervorgegangenen Endgleichungen sind diese:

$$\begin{aligned} 42447 x - 34346 y - 38638 z - 304,0 &= 0, \\ - 34346 x + 80761 y + 31414 z + 1048,4 &= 0, \\ - 38638 x + 31414 y + 37436 z + 264,3 &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich für x , y , z folgende Werthe ergeben:

$$x = + 0,00080; \quad y = - 0,01517; \quad z = + 0,00650;$$

und hieraus gehen die verbesserten Elemente hervor:

$$\log \alpha = 0,59498; \quad \log \beta = 9,92687 - 10; \quad \log p = 0,49206;$$

auf welche sich die in der vorletzten Columnne enthaltenen Winkel beziehen.

§ 8. Obgleich die in den gemessenen Winkeln nachbleibenden Fehler im Ganzen nicht groß sind, so kommen doch Fehler von 3',3 und 5',7 vor, die unmöglich für Beobachtungsfehler angesehen werden können, sondern nur für Abweichungen in den Krystallwinkeln selbst, d. h. für Resultate der Störungen, welche bei der Krystallisation gewirkt. Da diese Messungen nun an vielen verschiedenen Krystallen angestellt sind, so entsteht die Frage, ob diese Abweichungen an den Winkeln ein und desselben Krystalls eben so groß sein werden, oder ob sie vielleicht zum Theil wenigstens von der Art sind, daß der Zonenzusammenhang an dem einen Individuum, an welchem sie vorkommen, nicht gestört wird; denn daß die ganzen Fehler nicht diesem Gesetze folgen, geht schon daraus hervor, daß auch im Parallelismus der Flächen Abweichungen vorkommen.

Es war mir daher sehr erwünscht, daß ich durch die Gefälligkeit des Herrn Hofapotheker Hagen in Königsberg drei außerordentlich schöne Krystalle erhielt, die ich dazu benutzen konnte, über diese Frage etwas zu entscheiden, indem sich an je-

dem derselben 10 verschiedene Winkel messen liefsen. Diese Krystalle hatten sich in einer grofsen Quantität von Eisenvitriolauflösung langsam gebildet, und obgleich sie zu einer solchen Gröfse angewachsen waren, dafs Flächen von $\frac{1}{4}$ Zoll im Quadrat an ihnen vorkamen, so gaben diese doch die reinsten Spiegelbilder. Die Güte der Flächen scheint daher nicht allein von der Gröfse der Krystalle abzuhängen, sondern vielmehr vom Verhältnifs dieser zu der Menge von Flüssigkeit, aus der sie ausgeschieden, und zur Dauer ihrer Bildung.

§ 9. An diesen Krystallen nun sind die Winkelmessungen mit dem zweiten Goniometer, dessen ich Erwähnung gethan, angestellt worden. Dieses Instrument, das in der Vollkommenheit seiner Construction kaum etwas zu wünschen übrig läfst, hat einen Kreis von beinahe 8 Zoll Durchmesser, mit voller Scheibe, auf einem schiefen Rande getheilt; die Eintheilung des Limbus ist auf 20', und am Nonius liest man $\frac{1}{2}$ Minute ab; bei der Feinheit der Theilung kann man aber $\frac{1}{4}$, selbst $\frac{1}{8}$ Minute mit Sicherheit schätzen, und dafs auch die Genauigkeit der Theilung so weit reicht, werde ich bei der Darlegung meiner optischen Beobachtungen Gelegenheit haben zu zeigen. Sowohl der Kreis selbst, als die innere Axe, an welcher der Krystall befestigt wird, werden durch feine Mikrometerschrauben bewegt. Wodurch sich dieses Instrument aber noch besonders vortheilhaft vor den Goniometern älterer Construction auszeichnet, ist die an demselben angebrachte vorzügliche Vorrichtung zur Einstellung des Krystalls. Der Theil, an welchem dieser befestigt wird, hat die Gestalt eines Kugelsegments, so dafs der Krystall ungefähr den Mittelpunkt dieser Kugel einnehmen würde, wenn man sich dieselbe ergänzt dächte. Dieses Kugelsegment hat zwei auf einander senkrechte Axendrehungen, die um den Mittelpunkt der Kugel geschehen, so dafs man den Krystall in jeder Richtung drehen kann, ohne dafs er seinen Ort dabei bedeutend verändert. Diese ganze Vorrichtung kann ausserdem in zwei unter einander und auf der Goniometeraxe senkrechten Richtungen verschoben werden, und alle diese Bewegungen geschehen durch Mikrometerschrauben. Auf dem Brette mit Stellschrauben, welches das ganze Goniometer trägt, ist nun noch eine Säule angebracht, auf welcher ein kleines Fernrohr nach Art der Passageninstrumente ruht. Die Ebene, in welcher das Fernrohr sich bewegt, ist senkrecht auf der Goniometeraxe und geht nahezu durch den Krystall, und um letzteres immer vollkommen zu Wege bringen zu können, ist der Fufs der Säule, welche das Fernrohr trägt, parallel der Goniometeraxe

verschiebbar, und kann in jeder Stellung durch zwei Schrauben festgeklemmt werden. Wenn man das Fernrohr auf den Krystall richtet, so ist sein Objectiv etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll von demselben entfernt; es vergrößert gar nicht und giebt dadurch eine große Lichtstärke, so daß man selbst von schwach spiegelnden Flächen deutliche Bilder erhält.

Die Einstellung des Krystalls geschieht nun am einfachsten auf folgende Weise. Man befestigt zuerst an Stelle des Krystalls einen kleinen Spiegel mit parallelen Flächen, den man von seiner Belegung befreit hat, an der Axe des Goniometers, und verstellt nun sowohl den Spiegel durch Drehung des Kugelsegments als das Goniometer durch die Stellschrauben so lange, bis das Bild einer Marke, sowohl von der einen als (nach Umdrehung um 180°) von der andern Seite des Spiegels reflectirt, mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs zusammenfällt; alsdann sind die Flächen des Spiegels der Goniometeraxe parallel. Bringt man nun den Krystall statt des Spiegels an das Goniometer, und stellt die Krystallflächen, zwischen denen der Winkel gemessen werden soll, durch Drehung des Kugelsegments so, daß die von ihnen reflectirten Bilder derselben Marke bei unveränderter Richtung des Fernrohrs auf das Fadenkreuz desselben fallen, so müssen diese beiden Flächen auch der Axe parallel sein. Hierbei ist es offenbar gleichgültig, ob die Axe des Goniometers horizontal ist oder nicht. Gleiche Entfernung von der Axe wird den Flächen auch hier dadurch gegeben, daß man sie bei nahezu horizontaler Lage mit einem daneben befindlichen Gegenstande in gleiches Niveau bringt, was durch die beiden senkrecht auf die Axe möglichen Verschiebungen bewerkstelligt wird. Die Winkelmessung selbst geschieht, indem man die Krystallflächen eine nach der andern durch Drehung des eingetheilten Kreises so einstellt, daß die von ihnen reflectirten Bilder eines horizontalen Fadens mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs zusammenfallen. — Die Winkel, welche ich auf diese Weise an den erwähnten 3 Krystallen gemessen habe, sind in nachstehender Tafel enthalten. Jede Angabe ist in der Regel das Mittel aus 4 Messungen; mehrer glaubte ich nicht zu bedürfen, da die größte zwischen den Messungen eines Winkels vorkommende Differenz 0',8 betrug. Bei der Vortrefflichkeit der Krystallflächen habe ich zu vielen Messungen statt des zum Goniometer gehörigen Fernrohrs ein Sextantenfernrohr mit ungefähr fünffacher Vergrößerung anwenden können.

		No. I.			No. II.			No. III.		
		Gemessene Winkel.	Corrigirte Winkel.	Differenz.	Gemessene Winkel.	Corrigirte Winkel.	Differenz.	Gemessene Winkel.	Corrigirte Winkel.	Differenz.
bg	20°	52',1	52',7	+ 0',6		52',9			52',7	
bv	43		46,9		47',5	48,9	+ 1',4	48',2	47,3	— 0',9
vg	22	55,3	54,1	— 1,2	57,2	55,9	— 1,3	56,5	54,6	— 1,9
vt	74		21,0		25,0	24,2	— 0,8	23,4	22,0	— 1,4
$\frac{oo}{2}$	56	15,2	15,7	+ 0,5	16,6	16,0	— 0,6	18,0	17,2	— 0,8
$\frac{ff}{2}$	48	52,6	52,0	— 0,6	53,8	53,7	— 0,1	53,4	54,1	+ 0,7
$\frac{pp}{2}$	39		15,8		18,2	17,9	— 0,3		17,9	
$\frac{kk}{2}$	64	22,4	21,9	— 0,5		21,6			23,0	-
bf	80	40,0	39,8	— 0,2		43,5		41,8 38,5) 40,1	41,1	+ 1,0
gf	67	44,1	44,5	+ 0,4		48,2		47,3 45,6) 46,5	46,3	— 0,2
vo	66		21,5			22,6		23,0	22,7	— 0,3
vf	56	2,4	4,1	+ 1,7	7,0	6,7	— 0,3	6,2 4,4) 5,3	6,0	+ 0,7
to	74		49,2		46,8	46,6	— 0,2		49,0	
tf	60		56,4		55,3	57,5	+ 2,2	58,8 57,7) 58,3	57,8	— 0,5
of	44	14,6	14,5	— 0,1		15,8			13,2	
(of)	122	26,1	25,6	— 0,5	28,8	29,3	+ 0,5		28,9	

Die Grade der Winkel, welche in der zweiten Columne stehen, gelten durch die ganzen Horizontalreihen hindurch. Die Columnen mit der Ueberschrift "Corrigirte Winkel" enthalten die an jedem Krystall für sich dem Zonenzusammenhange gemäß ausgeglichenen Winkel, wo ich auch die ungemessenen mit berechnet und hingesezt habe, zur bessern Vergleichung der 3 Krystalle unter einander. Wenn ich unter den gemessenen Winkeln bei No. I. nur bg und νg , bei No. II. und No. III. dagegen nur $b\nu$ und νg angeführt habe, während der dritte Winkel doch jedesmal durch Addition und Subtraction der beiden andern gegeben war, so ist dieses nicht zufällig, sondern beruht darauf, daß bei No. I. die Fläche g , bei No. II. und Nr. III. die Fläche ν am vorzüglichsten gebildet war. Bei No. III. sind 4 Winkel doppelt gemessen; sie gehören zu denen, welche von einer schiefen Endfläche und einer augitartigen Zuschärfungsfläche gebildet werden, und da die letzteren doppelt vorhanden waren, so konnte ich diese Winkel auf der einen und andern Seite messen. Sie erhielten daher auch bei der Ausgleichung das doppelte Gewicht, was auch bei allen 3 Krystallen von den Winkeln $\frac{oo}{2}$, $\frac{ff}{2}$, $\frac{PP}{2}$ und $\frac{kk}{2}$ gilt.

§ 10. Es bleiben nun auch hier noch Fehler von 2' nach, und beim Krystall No. III. sehen wir sogar zwischen den beiden Werthen des Winkels bf einen Unterschied von 3',3, welches reine Abweichungen vom Zonenzusammenhange sind. Dagegen finden wir aber bei den ausgeglichenen Winkeln, welche doch schon im Zonenzusammenhange stehen, zwischen den verschiedenen Krystallen noch größere Differenzen, z. B. 3',7 bei den Winkeln bf und of von No. I. und No. II., so daß wohl aus der Vergleichung der verschiedenen Krystalle hervorzugehen scheint, daß die Unterschiede, welche sich zwischen den Messungen desselben Winkels an verschiedenen Individuen finden, zum Theil zwar zufällige Fehler sind, zum Theil aber auch so von einander abhängen, daß der Zonenzusammenhang beim einzelnen Individuum nicht gestört wird. — Ueberdies scheinen auch selbst die Abweichungen der Winkel vom Zonenzusammenhange nicht gänzlich unregelmäßig und zufällig zu sein. Der Winkel bg z. B. hat nach der Ausgleichung, sowohl bei den früheren Messungen als bei diesen 3 Krystallen, fast genau denselben Werth erhalten, nämlich $20^{\circ} 52',8$, während alle Beobachtungen ihn kleiner geben, die früheren $51',5$; No. I. $52',1$; No. II. $50',3$; No. III. $51',7$; und ich habe noch an mehreren andern Krystallen diesen Winkel ge-

messen, und ihn einmal sogar $= 20^\circ 48',1$ gefunden, aber nie gröfser als $20^\circ 52',8$. Aehnliches wird gewifs auch bei andern Winkeln vorkommen; man mufs sich daher wohl vorsehen, nicht durch die Messung einiger bestimmter Winkel, selbst wenn sie an verschiedenen Individuen übereinstimmen, die Elemente einer Krystallform mit Genauigkeit bestimmen zu wollen, sondern vielmehr möglichst viel von verschiedenen Flächen gebildete Winkel dazu wählen.

Bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung der Winkel nach dem Zonengesetze sind wieder dieselben Elemente, als früher in § 7, zum Grunde gelegt worden. Ich will die Endgleichungen für die einzelnen Krystalle hier nicht weiter anführen, sondern nur die Werthe der verbesserten Elemente; diese sind folgende:

	No. I.	No. II.	No. III.
$\log \alpha$	0,59438	0,59710	0,59509
$\log \beta$	9,92759 — 10	9,92732 — 10	9,92711 — 10
$\log p$	0,49149	0,49440	0,49227.

§ 11. Um nun zu einem Endresultate in der Bestimmung der krystallographischen Elemente des Eisenvitriols zu gelangen, habe ich alle Beobachtungen vereinigt, den früher angestellten jedoch nur das halbe Gewicht gegeben. Es liegt hierin etwas Willkührliches, was aber nicht zu vermeiden ist, da wegen der Vermischung der Beobachtungsfehler mit den Störungen in der Krystallbildung kein sicheres Criterium für das Gewicht der Messungen vorhanden ist. Die auf diese Weise gebildeten Endgleichungen sind:

$$\begin{aligned} 99700 x - 50684 y - 94858 z + 307,4 &= 0, \\ - 50684 x + 133005 y + 41666 z + 931,6 &= 0, \\ - 94858 x + 41666 y + 95819 z - 428,3 &= 0. \end{aligned}$$

Da nun die hieraus gefundenen Werthe von x , y und z mit 0,05 multiplicirt werden müssen, um die Correctionen der Elemente zu erhalten, so werden diese

$$+ 0,00025; \quad - 0,00047; \quad + 0,00067;$$

welche an die zum Grunde gelegten Elemente (siehe S. 14) angebracht, folgende wahrscheinlichsten Werthe dieser Elemente gehen:

$$\log \alpha = 0,59519 \quad \log \beta = 9,92716 - 10 \quad \log p = 0,49241.$$

Ihnen entsprechen, als wahrscheinlichste Werthe der Winkel, diese:

$$\begin{array}{lll}
 bg = 20^\circ 52',7 & \frac{oo}{2} = 56^\circ 16',9 & fo = 44^\circ 13',6 \\
 bv = 43 \quad 47,3 & \frac{ff}{2} = 48 \quad 53,9 & (fo) = 122 \quad 28,5 \\
 vg = 22 \quad 54,6 & \frac{PP}{2} = 39 \quad 17,7 & oP = 33 \quad 11,2 \\
 vt = 74 \quad 22,4 & \frac{kk}{2} = 64 \quad 22,8 & (fk) = 61 \quad 59,7 \\
 \\
 bf = 80 \quad 41,2 \\
 go = 58 \quad 45,4 \\
 gf = 67 \quad 46,3 \\
 vo = 66 \quad 22,5 \\
 vf = 56 \quad 6,0 \\
 to = 74 \quad 48,7 \\
 tf = 60 \quad 57,7
 \end{array}$$

Wir haben noch die Mohs'schen Winkelangaben mit diesen zu vergleichen; er giebt (Grundriss der Mineralogie, Thl. II. S. 52) folgende:

$$\begin{array}{ll}
 g = 69^\circ 6' & oo = 69^\circ 17' \\
 v = 46 \quad 13 & ff = 82 \quad 21 \\
 t = 28 \quad 4 & PP = 101 \quad 35
 \end{array}$$

Die ersten 3 beziehen sich auf schiefe Endflächen und sind die Neigungswinkel derselben gegen die Normale der Fläche *b*, die 3 letzteren sind Winkel, die von den Flächen selbst nicht von ihren Normalen gebildet werden. Nach unserer Bezeichnungsart haben wir daraus:

$$\begin{array}{ll}
 bg = 20^\circ 54' & \frac{oo}{2} = 55^\circ 21',5 \\
 bv = 43 \quad 47 & \frac{ff}{2} = 48 \quad 49,5 \\
 vt = 74 \quad 17 & \frac{PP}{2} = 39 \quad 12,5
 \end{array}$$

Im Ganzen sind die Abweichungen zwischen diesen Werthen und den von mir gefundenen nicht groß, nur der Winkel $\frac{oo}{2}$ ist offenbar fehlerhaft. Die übrigen drei

Winkel sind ziemlich genau dem Zonenzusammenhange anpassend, gleichen wir sie diesem gemäß aus, so werden sie nach der Mohs'schen Bezeichnungsart:

$$\begin{array}{ll} g = 69^\circ 6',7 & oo = \\ \nu = 46 13,4 & ff = 82^\circ 22',0 \\ t = 28 3,6 & PP = 101 34,0 \end{array}$$

Der Winkel oo erhält aber in Uebereinstimmung mit den übrigen den Werth $67^\circ 30',6$; hier ist also in den Mohs'schen Angaben ein Druck- oder Rechnungsfehler. Die Abweichung seiner schiefen Axe, d. h. der Winkel zwischen der Kante ff und der Normale der Fläche b , ist nach seiner Angabe, und zwar übereinstimmend mit den übrigen Winkeln, $= 14^\circ 19',5$; meinen Beobachtungen zu Folge ist dieser Winkel $= 14^\circ 14',9$.

Ich will nur noch die Bemerkung hinzufügen, dafs der Eisenvitriol, an welchem ich diese Winkelmessungen sowohl als auch die optischen Untersuchungen angestellt habe, nicht der in den Fabriken käufliche, sondern durch Auflösung von reinem Eisen in Schwefelsäure erzeugter war.

ZWEITER THEIL.

Optische Beobachtungen am Eisenvitriol.

§ 12. Die einzigen Angaben, welche ich über die optischen Eigenschaften des Eisenvitriols gefunden habe, sind in Herschel's Werke vom Licht, übersetzt von Schmidt, enthalten. Sie rühren von Brewster her und beziehen sich auf den Winkel der optischen Axen und auf den Coefficienten der größten Brechung; ersteren giebt er $= 90^\circ$ an, letzteren $= 1,494$. — Ich ging zuerst darauf aus, durch Beobachtung der Farbenringe die Lage der optischen Axen zu bestimmen, welche ich bei einer vorläufigen Beobachtung in der den Krystall symmetrisch theilenden Ebene fand. Da der Winkel der optischen Axen groß ist, so konnte man nur mit Schwierigkeit die zu beiden optischen Axen gehörigen Farbenringe an einer und derselben Krystallplatte beobachten, indem die Gesichtslinie überaus schräge gegen dieselbe gerichtet sein mußte. Es hätte daher wenig Genauigkeit erwarten lassen, wenn ich die Lage beider optischen Axen an einer Platte hätte bestimmen wollen, weil nicht allein eine sehr genaue Kenntniß der mittleren Brechung des Eisenvitriols dazu erforderlich gewesen wäre, sondern auch die Verzerrung der Farbenringe, welche durch die Brechung überhaupt und besonders durch die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen Farben hervorgebracht wird, einen nachtheiligen Einfluß auf die Bestimmung gehabt hätte. Denn es ist wohl nicht zu bezweifeln, daß diesem Umstande zum Theil die großen Differenzen zuzuschreiben sind, welche zwischen den durch Beobachtung der Farbenringe gefundenen, und den aus der Differenz der Brechungen abgeleiteten Werthen des Winkels der optischen Axen vorkommen.

Ich zog es daher vor, die Lage jeder der beiden optischen Axen für sich an Platten, deren Flächen nahezu senkrecht auf der Axe standen, zu bestimmen. Ich

schliff also eine Platte von ungefähr 2 Linien Dicke nahezu senkrecht auf die Axe, welche ich bestimmen wollte. Die Schleifung geschah auf einem mattgeschliffenen Spiegelglase mittelst Provencer-Oels und zu dem feinsten Staube geriebenen Sandes, auf welche Weise es bei einiger Fertigkeit möglich ist, die geschliffenen Flächen an Ebenheit und Glanz den Spiegelflächen nahe zu bringen. Da es nothwendig war, die Lage der geschliffenen Flächen gegen die Krystallflächen zu kennen, so kam es mir sehr zu Statten, daß der Eisenvitriol, parallel der schiefen Endfläche b , einen sehr vollkommenen Blätterdurchgang hat, der sich mit gehöriger Vorsicht so spalten läßt, daß die Spaltungsfläche rein spiegelnd wird. Ich ging also darauf aus, für jede der beiden optischen Axen den Winkel zu bestimmen, welchen sie mit diesem Blätterdurchgange bildet.

§ 13. Zu diesem Zwecke ersann ich folgendes Verfahren. Ich maß zuerst den Winkel zwischen dem Blätterdurchgang und einer der beiden geschliffenen Flächen der Krystallplatte, welche ich mit F bezeichnen will; das Complement des gemessenen Winkels zu 90° oder der Neigungswinkel der Normale der Fläche F gegen den Blätterdurchgang heiße γ . Wäre nun die Fläche F vollkommen senkrecht auf der optischen Axe, so würde γ schon der gesuchte Winkel sein. Da dieses jedoch nicht der Fall war, so mußte die Abweichung der optischen Axe von der Normale der Fläche F bestimmt werden, und zwar in der Ebene, welche durch die Normale des Blätterdurchgangs und die Normale der Fläche F geht. Dieses geschah auf folgende Weise. Ich belegte die andere Seite der Platte mit geschwärztem Papier, so daß nur eine kleine kreisrunde Oeffnung von $\frac{1}{2}$ Linie im Durchmesser zum Durchsehen frei blieb; dann befestigte ich sie an der Goniometeraxe, die eine horizontale Lage hatte, und stellte sie so ein, daß sowohl die Fläche F als der Blätterdurchgang dieser Axe parallel war, auf dieselbe Art wie bei den Krystallwinkelmessungen. Hinter dem Goniometer, d. h. nach dem Fenster zu, lag ein schwarzes Spiegelglas, das zum Polarisationspiegel diente, und dem ich eine solche Lage gab, daß das Bild einer von demselben reflectirten horizontalen Fensterleiste dem von der Fläche F reflectirten Bilde derselben und also der Goniometeraxe parallel erschien. Vor dem Krystall, d. h. zwischen ihm und dem Beobachter, war eine Turmalinplatte angebracht, so daß man durch diese und durch die kreisrunde Oeffnung in der Belegung der Krystallplatte hindurch auf dem Polarisationspiegel die Farbenringe beobachten konnte, und nun stellte ich durch

Drehung des eingetheilten Kreises die Krystallplatte so, daß die Fläche F dem Polarisationspiegel zugewandt war, und der innerste Kreis der Farbenringe von der Fensterleiste, deren Bild man zugleich im Polarisationspiegel sah, bissecirt wurde. Bei dieser Stellung der Platte machte ich eine Ablesung am Kreise. Da die Farbenringe wegen des großen Winkels der optischen Axen und des fast senkrechten Durchganges der Strahlen durch die Platte fast ganz kreisförmig erschienen, so konnte die Bisection sehr genau beobachtet werden. Bei dieser Stellung ging offenbar der von der Mitte der Fensterleiste kommende und vom Polarisationspiegel reflectirte Strahl gerade in der Richtung der optischen Axe durch den Krystall, worauf, wie man leicht einsieht, weder die Abweichung der beiden Flächen der Krystallplatte vom Parallelismus, noch die Stellung und Form des Turmalins einen Einfluß hatte. Ich bezeichnete mir nun noch durch einen aufgespannten Seidenfaden auf dem Polarisationspiegel die Stelle, an welcher die Mitte der Fensterleiste erschien, wenn man durch die in der Belegung des Krystalls gelassene Oeffnung sah. Jetzt drehte ich den Kreis des Goniometers so, daß die Fläche F nach oben zu liegen kam, und stellte sie durch Spiegelung einem neben der Krystallplatte stehenden kleinen Glasspiegel parallel, und machte eine zweite Ablesung am Kreise. — Die Krystallplatte wurde nun von der Goniometeraxe abgenommen, mit der entgegengesetzten Seite an derselben befestigt, und wiederum sowohl die Fläche F als der Blätterdurchgang der Axe parallel gestellt, sodann die Fläche F bei horizontaler Lage mit dem kleinen Spiegel in gleiches Niveau gebracht, und die Platte außerdem noch so gestellt, daß, durch dieselbe gesehen, der Seidenfaden auf dem Polarisationspiegel wieder in der Mitte der Fensterleiste erschien, beides vermittelt der senkrecht gegen die Goniometeraxe möglichen Verschiebungen. Jetzt wurde bei dieser Einstellung der Platte die Beobachtung wiederholt; zuerst die Krystallplatte durch Drehung des eingetheilten Kreises so gestellt, daß die Farbenringe durch dieselbe Fensterleiste bissecirt erschienen, und eine Ablesung gemacht, dann die Fläche F durch Spiegelung dem kleinen Glasspiegel, welcher dieselbe Lage wie bei der früheren Beobachtung hatte, parallel gestellt, und wiederum abgelesen.

Offenbar hatte der Lichtstrahl, welcher von der Mitte der Fensterleiste kommend vom Polarisationspiegel reflectirt wurde und in der Richtung der optischen Axe durch

den Krystall ging, bei der zweiten Beobachtung genau dieselbe Richtung im Raume als bei der ersten, da ja die Krystallplatte nach der Umdrehung so eingestellt wurde, daß dieser Strahl von derselben, durch den Seidenfaden bezeichneten Stelle des Polarisationsspiegels reflectirt werden mußte, um durch die kleine Oeffnung in der Belichtung der Platte, durch welche die Beobachtung der Farbenringe geschah, seinen Weg zu nehmen. Die Normale der Fläche F lag aber bei der in der ersten Lage der Platte gemachten Beobachtung auf der einen, und bei der nach Umkehrung derselben gemachten Beobachtung auf der andern Seite dieses Strahls. Der Winkel nun, welchen die Normale von F bei der Stellung der Platte, in welcher die Farbenringe beobachtet werden, mit der Normale des kleinen Spiegels macht, wird mir durch den Unterschied der beiden Ablesungen gegeben, und die Verschiedenheit dieses Winkels vor und nach der Umkehrung der Platte giebt mir die doppelte Abweichung der Normale der Fläche F von dem Lichtstrahl, welcher innerhalb des Krystalls mit der optischen Axe zusammenfällt. Wie nun aus dieser Abweichung die Neigung der optischen Axe gegen den Blätterdurchgang bestimmt wird, werden wir sehen, nachdem ich erst die Beobachtungen selbst angeführt habe.

§ 14. Die eine optische Axe liegt zwischen den Normalen der Kante ff und der Fläche ν , die andere zwischen den Normalen der Flächen t und b ; in dem Schema Fig. II. sind a und a' ihre repräsentirenden Punkte. Ich werde jene die vordere, diese die hintere optische Axe nennen; erstere habe ich an 4 Krystallplatten beobachtet, letztere an dreien, und an jeder Platte sind zwei von einander unabhängige Bestimmungen gemacht. B bezeichnet die Ablesung bei Beobachtung der Farbenringe, B' dieselbe nach Umkehrung der Krystallplatte; G bezeichnet die Ablesung beim Parallelismus der Fläche F mit dem danebenstehenden kleinen Spiegel, G' dieselbe nach Umkehrung der Krystallplatte. D ist die Ablesung beim Parallelismus des Blätterdurchgangs mit dem kleinen Spiegel; ich verband nämlich mit diesen Beobachtungen zugleich die Messung des Winkels zwischen der Fläche F und dem Blätterdurchgange. γ ist das Complement dieses Winkels zu 90° , also

$$\gamma = 90^\circ \pm (G - D),$$

wo man die Zeichen so nehmen muß, daß γ immer kleiner als 90° wird. z ist die Abweichung des Lichtstrahls, welcher im Innern des Krystalls der optischen Axe parallel geht, von der Normale der Fläche F , und zwar in der Richtung von dieser

Normale zur Normale des Blätterdurchganges hin, und wird also, nach dem früher Bemerkten, durch die Formel

$$z = \mp \frac{1}{2} (G - B - G' + B')$$

gefunden; die beiden Zeichen entsprechen denen in γ . Mit z' ist auch die Abweichung desselben Lichtstrahls von der Normale der Fläche F aber in der gegen z senkrechten Richtung bezeichnet. Diese Abweichung ist ebenso wie z beobachtet worden, jedoch nur mit sehr geringer Genauigkeit, da sie fast gar keinen Einfluss auf die Bestimmung der Lage der optischen Axen hat; an den Platten, wo sie weniger als $\frac{1}{2}$ Grad betrug, ist sie ganz weggelassen.

Vordere optische Axe.

	I. Platte.		II. Platte.		III. Platte.		IV. Platte.	
B	159° 4',2	159° 21',1	41° 0',5	155° 36',6	101° 33',7	92° 33',4	12° 58',8	178° 2',0
G	126 32,8	126 51,0	9 48,3	123 53,9	65 53,5	56 56,4	94 43,5	144 41,3
D	65 36,8	65 55,8	70 15,5	184 42,6	129 17,6	120 23,2	156 30,9	206 32,7
B'	148 59,3	184 37,4	45 9,7	158 13,0	95 3,5	67 25,7	127 37,5	178 29,9
G'	119 14,4	154 55,1	9 43,7	123 22,7	64 10,2	36 27,2	94 11,9	145 3,7
γ	29 4,0	29 4,8	29 32,8	29 11,3	26 35,9	26 33,2	28 12,6	28 8,6
z	-1 23,2	-1 23,9	-2 6,9	-1 33,8	+2 23,5	+2 19,3	-0 5,2	-0 2,7
z'	1 0	1 0						

Hintere optische Axe.

	I. Platte.		II. Platte.		III. Platte.	
B	141° 13',5	26° 23',6	157° 2',8	179° 42',4	160° 46',3	182° 45',8
G	108 3,3	353 18,9	123 12,8	145 52,9	126 9,3	149 32,8
D	142 37,2	27 51,6	156 52,5	179 32,0	93 49,0	116 18,0
B'	136 49,2	19 13,8	155 29,5	178 54,1	157 54,4	181 35,7
G'	107 20,6	349 55,6	122 40,8	146 6,5	126 9,9	148 39,3
γ	55 26,1	55 27,3	56 20,3	56 20,9	57 39,7	56 45,2
z	+1 50,8	+1 53,2	+0 30,6	+0 31,0	-1 26,2	-0 8,3
z'	1 15	1 15				

§ 15. Untersuchen wir nun, wie die Beobachtungen berechnet werden müssen, um den Neigungswinkel einer der optischen Axen gegen den Blätterdurchgang aus ihnen zu bestimmen. Man denke sich alle Linien durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt, und bezeichne die Durchschnittspunkte, welche sie mit der Kugeloberfläche bilden: M sei der Durchschnittspunkt der Normale des Blätterdurchgangs (siehe Fig. III.), N der Durchschnittspunkt der Normale der Fläche F , S der des Lichtstrahls, O der der optischen Axe, S , O und N liegen in einem größten Kreise nach dem Gesetze der Brechung, denn O repräsentirt zugleich den gebrochenen Strahl im Innern des Krystalls. ST und OP seien senkrecht auf MN . Dann ist $MN = 90^\circ - y$, $NT = z$, $TS = z'$ und $MO = 90^\circ - x$, wo x der gesuchte Winkel ist, nämlich die Neigung der optischen Axe gegen den Blätterdurchgang. Vernachlässigen wir nun die höheren Potenzen von z und z' bis auf die zweiten, so haben wir, wenn n den Coefficienten der Brechung des Eisenvitriols in der Richtung der optischen Axe bezeichnet, $OP = \frac{z'}{n}$ und $NP = \frac{z}{n}$. Im ΔMOP aber ist:

$$\cos MO = \cos MP. \cos OP$$

und mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\sin OP$

$$\cos MO = \cos MP - \cos MP. \frac{\sin^2 OP}{2}$$

$$\text{also } MO = MP + \cot g MP. \frac{OP^2}{2}. \sin 1''$$

$$90 - x = 90 - y - \frac{z}{n} + tg y. \frac{z'^2}{2n^2}. \sin 1''$$

$$x = y + \frac{z}{n} - tg y. \frac{z'^2}{2n^2}. \sin 1''$$

Da das Glied, welches z' enthält, mit $\sin 1''$ multiplicirt ist, so hat diese GröÙe nur einen geringen Einfluß auf den Werth von x ; ist $z' = 30'$, so ist dieses Glied, selbst bei der hinteren Axe, wo der Winkel y größer ist, nur $= 0,09$; es brauchte also nur bei den beiden ersten Blättchen berücksichtigt zu werden. Nach dieser Formel nun habe ich die Beobachtungen berechnet, indem ich n , zu Folge meiner später gemachten Bestimmung, $= 1,479$ nahm, und es ergaben sich folgende Werthe für x .

Vordere optische Axe.

	I. Platte.	II. Platte.	III. Platte.	IV. Platte.
$x = 28^\circ$	7,6 8,0	7,0 7,9	12,9 7,4	9,4 6,8
Mittlerer Werth von $x = 28^\circ 8,3$. Wahrscheinlicher Fehler = 0,5.				

Hintere optische Axe.

	I. Platte.	II. Platte.	III. Platte.
$x = 56^\circ$	40,3 43,9	41,0 41,9	41,4 39,6
Mittlerer Werth von $x = 56^\circ 41,4$. Wahrscheinlicher Fehler = 0,5.			

In Betreff der Beobachtungen will ich noch Folgendes bemerken. Die beiden Bestimmungen, welche ich an jeder Platte gemacht habe, sind ganz unabhängig von einander, indem die Platte bei der zweiten ganz von Neuem wieder an die Goniometeraxe befestigt und eingestellt wurde. Bei manchen ist sogar, wie man an der Aenderung des Winkels γ bemerken kann, die Fläche F vor der zweiten Beobachtung umgeschliffen oder der Blätterdurchgang von Neuem abgespalten; auch die Stellung des Spiegels und Goniometers wurde jedesmal wieder geprüft. An der zur vorderen optischen Axe gehörigen Platte II. hatte ich früher zwei andere Bestimmungen gemacht, die für x die Werthe $28^\circ 14,4$ und $28^\circ 16,5$ gaben; da diese jedoch so stark von den übrigen abwichen, so machte ich später zwei neue Bestimmungen an derselben Platte, die hier aufgeführt sind, und die, wie man sieht, viel besser mit den übrigen harmoniren; ich glaubte mich daher berechtigt, jene früheren Bestimmungen zu verwerfen. Die Abweichung derselben kann ich mir nur daraus erklären, daß der Blätterdurchgang, den ich bei den späteren Bestimmungen von Neuem absprengte, bei jenen früheren falsch gesprungen war. Denn ich habe nicht selten die Erfahrung gemacht, daß der Blätterdurchgang, wenn er nicht sehr vollkommen war, doppelte Bilder gab, die wohl $10'$ von einander abwichen.

Ich glaube übrigens, durch die Uebereinstimmung meiner Beobachtungen bewiesen zu haben, daß die Methode, welche ich anwendete, nicht unzweckmäfsig war. Merkwürdig ist die Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Platten, aus der hervorgeht, daß die Lage der optischen Axen durchaus nicht gröfseren, wo nicht geringeren, Abweichungen in verschiedenen Krystallen unterworfen ist, als die Lage der Krystallflächen.

§ 16. Die Summe der beiden Winkel α giebt uns den Winkel der optischen Axen, und die halbe Differenz derselben den Neigungswinkel der Mittellinie der optischen Axen gegen den Blätterdurchgang oder die Fläche b , also

$$\text{Winkel der optischen Axen} = 84^\circ 49',7$$

$$\text{Neigung der Mittellinie gegen die Fläche } b = -14^\circ 16',5,$$

und zwar ist dieses die Mittellinie, welche den spitzen Winkel der optischen Axen in die Hälfte theilt; das Vorzeichen — bedeutet, dafs sie auf der hinteren Seite der Fläche b liegt; diese Fläche ist nämlich bei der von mir angenommenen Stellung des Krystalls die Abstumpfung der vorderen und hinteren Säulenkante.

Die Beobachtungen sind bei einer mittleren Temperatur von $+13^\circ$ R. gemacht.

Ich mufs übrigens jetzt schon bemerken, dafs die Linien, welche wir bisher der Kürze wegen optische Axen genannt und deren Lage wir hier für den Eisenvitriol bestimmt haben, keineswegs die wirklichen optischen Axen sind, d. h. die Richtungen, in welchen die beiden Strahlen, die durch die doppelte Strahlenbrechung entstehen, im Innern des Krystalls eine gleiche Geschwindigkeit haben oder ungetheilt bleiben (siehe Fresnel's Mém. sur la double réfr. S. 156 in den Mémoires de l'Acad. roy. Tom. VII. 1824), sondern vielmehr die Richtungen, in welchen die Lichtwellen eine gleiche Geschwindigkeit haben, oder, was dasselbe heifst, die Normalen auf den beiden Kreisschnitten derjenigen Fläche, welche Fresnel die Elasticitätsfläche genannt hat. Denn es ist schon von dem Professor Hamilton in den Dubliner Memoiren (siehe Poggenдорfs Annalen. Bd. 28. S. 91), in Folge theoretischer Betrachtungen, die Bemerkung gemacht worden, dafs die Strahlen, welche im Innern des Krystalls ungetheilt bleiben, und also einer der sogenannten optischen Axen parallel gehen, ausserhalb desselben sich in eine Kegelfläche zertheilen, und dagegen Strahlen von einer gewissen Richtung, welche vor und nach dem Durchgange durch den Krystall unter einander parallel sind, im Innern des Krystalls sich in Form einer Kegelfläche ausbreiten, so jedoch, dafs zu allen diesen Strahlen eine einzige Wellenebene gehört, und zwar diejenige, welche einem Kreisschnitte der Fresnel'schen Elasticitätsfläche parallel ist. Offenbar können nun die im Krystall der optischen Axe parallel gehenden Strahlen, da sie sich nach dem Durchgange trennen, nicht mit einander interferiren, und also nicht den Mittelpunkt der Farbenringe bilden, sondern dieses werden diejenigen

Strahlen thun, welche nach dem Durchgange einander parallel gehen, im Krystall aber in eine Kegelfläche zerspalten sind, da diese Strahlen in ihrem ganzen Verlauf einer Wellenebene angehören. Da nun diese Wellenebene im Innern des Krystalls dieselbe Geschwindigkeit und also auch denselben Brechungscoefficienten hat als die der optischen Axe parallel laufenden Strahlen, und wir mit diesem Brechungscoefficienten aus der Lage des äufsern Strahls die Lage des innern nach dem Cartesischen Gesetze, welchem die Wellenebenen bei der Brechung folgen, abgeleitet haben, so folgt daraus, dafs wir auf diesem Wege die Richtungen der Normalen jener Wellenebenen oder die Normalen der beiden Kreisschnitte der Elasticitätsfläche gefunden haben. Man könnte diese füglich die optischen Axen der Wellenebenen nennen; ich werde sie jedoch im Verlauf dieser Abhandlung noch ferner schlechthin mit dem Namen der optischen Axen belegen, und um jene Linien zu bezeichnen, in denen die Strahlen eine gleiche Geschwindigkeit haben, werde ich sie die optischen Axen der Strahlen nennen.

§ 17. Meine nächste Untersuchung richtete sich auf die Differenz der Brechungen, zu deren Bestimmung ich die Methode anwandte, welche Biot in seiner Abhandlung über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung (*Mémoires de l'Académie royale*. Tom. III. An. 1818) auseinandergesetzt hat, jedoch mit bedeutenden Modificationen. Ich verband, wie er, ein Krystallprisma von $90^\circ DBA$, dessen Flächen eine bestimmte Lagen gegen die optischen Axen hatten, mit einem Glasprisma BAC von einem etwas kleineren Winkel, auf die Weise, wie Fig. IV es anzeigt, so dafs die brechenden Kanten B und A der beiden Prismen parallel waren. Jetzt befestigte ich das vereinigte Prisma an der Goniometeraxe, welche horizontal war, und stellte die Flächen DB , AB und AC derselben parallel. In einem Schirme, welcher das gegenüberstehende Fenster verdeckte, war eine sehr feine horizontale Spalte angebracht, etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll lang und $\frac{1}{2}$ Linie breit, durch welche das weifse Licht der Wolken sichtbar war. Die Linie von der Mitte der Spalte zur Mitte des Prismas war senkrecht auf der Goniometeraxe. Sah man jetzt in der gehörigen Richtung durch das Prisma, d. h. durch die Flächen DB und AC , so erschienen zwei gebrochene Bilder der Spalte, und zwar vertikal über oder unter der Spalte selbst (denn alle meine Untersuchungen erstreckten sich nur auf die Brechungen in den Hauptebenen des Krystalls). Da dem Glasprisma ein solcher Winkel gegeben war, dafs es das Krystall-

prisma möglichst achromatisirte, so war die Farbenzerstreuung in den Bildern fast gänzlich aufgehoben, während die doppelte Brechung wegen des großen Winkels des Krystallprismas sich in ihrer vollen Wirkung zeigte. Ich will den Winkel, unter welchem der von der Spalte kommende Lichtstrahl auf die hintere Fläche des Prismas fällt, es mag nun die Glas- oder Krystallfläche sein, den Einfallswinkel, und den Winkel, unter welchem er aus der vorderen Fläche wieder hervortritt, den Austrittswinkel nennen. Diese beiden Winkel sind es außer den Winkeln der Prismen, von welchen allein die Brechungen abhängen, und die Unterschiede derselben für die beiden verschieden gebrochenen Strahlen bestimmen unmittelbar die Differenz der Brechungen. Auf die Messung dieser Winkel und besonders ihrer Differenz kam es also an.

§ 18. Die Beobachtungen geschehen mittelst eines Fernrohrs, mit welchem man durch das Prisma hindurchsieht, und es können drei verschiedene Methoden befolgt werden.

Erste Methode. Es wird das Fernrohr mit dem Kreise des Goniometers fest verbunden, so daß die Axe des Fernrohrs auf das Prisma und senkrecht gegen die Goniometeraxe gerichtet ist. Man dreht nun den Kreis so, daß das Bild der Spalte direct gesehen mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs zusammenfällt (dabei wird nämlich vorausgesetzt, daß man noch neben dem Prisma vorbeisehen kann), und macht eine Ablesung; dann stellt man das Fernrohr durch Drehung des Kreises auf das eine und auf das andere gebrochene Bild der Spalte ein, wobei sich das Prisma mitdreht, und also seine Lage gegen das Fernrohr nicht verändert; endlich dreht man noch den Kreis so, daß man das von der Austrittsfläche des Prismas reflectirte Bild der Spalte auf dem Fadenkreuze des Fernrohrs sieht. Die bei diesen 4 Stellungen gemachten Ablesungen am Kreise des Goniometers geben uns den Einfalls- und Austrittswinkel für beide Brechungen; der Austrittswinkel bleibt für beide unverändert, und die Differenz der Brechungen wird also durch den Unterschied der Einfallswinkel allein bestimmt.

Zweite Methode. Das Fernrohr muß mit einem besonderen eingetheilten Kreise so verbunden sein, daß seine Axe dem Kreise parallel ist, und die Verlängerung derselben durch die Axe des Kreises geht. Dieser Apparat wird nun vor dem Prisma aufgestellt, so daß die Axe des Kreises mit der Verlängerung der Goniometer-

axe zusammenfällt, und das Fernrohr gerade auf das Prisma gerichtet ist; es bewegt sich dann bei Drehung des Kreises in der Vertikalebene, welche durch das Prisma und die Spalte am Fenster geht. Man stellt nun das Fernrohr erst auf die Spalte selbst, dann auf jedes ihrer beiden gebrochenen Bilder ein, ohne die Stellung des Prismas zu verändern, und macht diese 3 Ablesungen an dem eingetheilten Kreise des Fernrohrs. Dann liest man auch den Kreis des Goniometers bei derselben Stellung des Prismas ab, und dreht diesen darauf so, daß das von der Einfallsfläche des Prismas reflectirte Bild der Spalte auf das Fadenkreuz des Fernrohrs fällt, und macht eine zweite Ablesung am Kreise des Goniometers. Das Fernrohr muß dabei auf eines der gebrochenen Bilder gerichtet geblieben sein, oder wenn man vielleicht seine Stellung zu ändern genöthigt ist, um die Reflection beobachten zu können, so muß diese wieder am Kreise des Fernrohrs abgelesen werden. Die 5 oder 6 gemachten Ablesungen geben uns dann wieder den Einfalls- und Austrittswinkel für beide Brechungen, und da der Einfallswinkel hier für beide derselben ist, so wird uns die Differenz der Brechungen durch den Unterschied der Austrittswinkel allein bestimmt.

Dritte Methode. Man stellt das Fernrohr unbeweglich vor dem Krystalle auf, so daß seine Axe in der durch das Prisma und die Spalte gehenden Vertikalebene liegt und ungefähr die Richtung hat, in welcher die gebrochenen Bilder erscheinen. Nun bringt man durch Drehung des Prismas mittelst des Goniometerkreises erst das eine, dann das andere gebrochene Bild der Spalte, und endlich auch das von der Einfallsfläche des Prismas reflectirte Bild derselben auf das Fadenkreuz des Fernrohrs, welches unverändert bleibt; dieses giebt 3 Ablesungen. Die Richtung des Fernrohrs (ich setze nämlich voraus, daß dieses mit keinem eingetheilten Kreise in Verbindung steht) wird nun an der Wand des Fensters durch eine Marke bezeichnet, und der Winkel zwischen dieser Marke und der Spalte, dessen Scheitel in der Goniometeraxe liegt, muß noch besonders gemessen werden. Diese Data geben uns wieder die gesuchten Winkel; es ändert sich aber hier sowohl der Einfalls- als der Austrittswinkel für die beiden Brechungen, und zwar um eine gleiche Gröfse, und die Differenz der Brechungen wird uns also durch die Differenz beider Winkel bestimmt. — Es kann der Fall eintreten, daß die Beobachtung des reflectirten Bildes der Spalte von der Einfallsebene sich bei derselben Stellung des Fernrohrs nicht wohl beobachten läßt.

Dann muß man das Fernrohr bei Beobachtung des reflectirten Bildes auf eine zweite entfernter von der Spalte angebrachte Marke richten, und auch den Winkel zwischen dieser Marke und der Spalte besonders messen.

§ 19. Die erste Methode habe ich nicht angewendet, weil mir die dazu erforderliche Vorrichtung mangelte. Nach der zweiten habe ich einige Beobachtungen gemacht; an Statt des eingetheilten Kreises, mit welchem das Fernrohr verbunden sein muß, bediente ich mich eines Spiegelsextanten, an dessen Allidade das Fernrohr befestigt war. Da jedoch die Festigkeit der Aufstellung dieses Apparats nicht zuverlässig genug war, so verließ ich diese Methode, und habe fast alle Beobachtungen nach der dritten angestellt. Diese hat zwei Vorzüge vor den beiden übrigen; sie ist erstens einfacher, indem man außer dem Goniometer nur noch ein Fernrohr mit einem Gestelle braucht, auf welchem es in verschiedener Höhe und Richtung unverrückt aufgestellt werden kann, und zweitens läßt sie eine fast doppelte Genauigkeit in der Bestimmung der Differenz der Brechungen zu, indem der beobachtete Unterschied des Einfalls- und Austrittswinkels, von welchem diese abhängt, hier fast doppelt so groß ist. — Zur Messung der Winkel zwischen der Spalte und der Marke, welche bei dieser Methode besonders gemacht werden muß, wandte ich ein Verfahren an, dessen Beschreibung ich hier geben will, weil es zugleich zur Prüfung der Theilung eines Goniometerkreises dienen kann. Ich befestigte an der Axe des Goniometers ein Stück Spiegelglas, welches auf der unteren Seite mattgeschliffen war, damit nur die obere Seite spiegelte, und diese wurde der Goniometeraxe parallel gestellt und zugleich so, daß sie in der Axe lag. Letzteres erreicht man am einfachsten dadurch, daß man bei nahezu horizontaler Lage des Spiegels neben demselben eine andere Fläche aufstellt, in gleichem Niveau mit der spiegelnden Fläche, diese nun um 180° dreht, und wenn sie dann nicht wiederum mit der danebenstehenden Fläche in gleichem Niveau ist, die Höhe des Spiegels um die Hälfte des Unterschieds im Niveau corrigirt. Jetzt stellte ich vor dem Spiegel ein Fernrohr unbeweglich auf, so daß die Verlängerung seiner Axe nahezu durch die Goniometeraxe ging und auf ihr senkrecht stand, und brachte nun durch Drehung des Goniometerkreises die von dem Spiegel reflectirten Bilder der Spalte und der Marke, oder überhaupt der beiden Gegenstände, zwischen denen der Winkel gemessen werden sollte, auf das Fadenkreuz des Fernrohrs; der Unterschied der bei beiden Einstellungen gemachten Ablesungen gab mir den halben

Winkel. So habe ich alle Winkelmessungen dieser Art gemacht. Will man nun die Theilung des Kreises prüfen, so mißt man denselben Winkel auf verschiedenen Bögen des Kreises, indem man den Spiegel durch Drehung der innern Goniometeraxe in verschiedene Lagen gegen die Theilung des Kreises bringt. Ich habe auf diese Weise bei dem vorzüglichern Goniometer (§ 9), mit dem ich die meisten optischen Beobachtungen gemacht habe, viele Stellen der Theilung mit einander verglichen, und keine größeren Differenzen als von 0',1 gefunden, was überdieß Einstellungs- und Ablesungsfehler sein können. Ich will übrigens noch bemerken, daß wenn es bloß auf die Prüfung der Theilung und nicht auf die Messung des Winkels ankommt, die spiegelnde Fläche gar nicht in der Goniometeraxe zu liegen, und ebenso die verlängerte Axe des Fernrohrs nicht durch dieselbe zu gehen braucht, was selbst bei der Messung des Winkels nicht erforderlich ist, wenn nur die beiden Gegenstände, zwischen denen der Winkel gemessen wird, nahezu gleich weit vom Goniometer entfernt sind. Das Fernrohr, welches ich hierzu sowohl als auch zu den Beobachtungen der Brechungen anwandte, war von einem Troughton'schen Spiegelsextanten; es hatte ein achromatisches Objectiv von 10 Linien Durchmesser, und gab eine ungefähr fünffache Vergrößerung.

§ 20. Kehren wir nun nach dieser allgemeinen Auseinandersetzung der Beobachtungsmethode zur Zubereitung der Krystallprismen zurück, von der ich etwas ausführlicher sprechen muß. Die Lage des Axensystems, welches Fresnel das Elasticitätsaxensystem genannt hat, ist mir, vorausgesetzt daß die Fresnel'schen Gesetze auch für das Krystallsystem des Eisenvitriols gelten, durch die Lage der optischen Axen desselben gegeben. Ich will die Mittellinie, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt und welche nach meiner Bestimmung den Winkel — $14^{\circ} 16',5$ mit der Krystallfläche b bildet, zur Axe c wählen, die Halbierungslinie des stumpfen Winkels zur Axe a , und die auf der Ebene der optischen Axen senkrechte Linie zur Axe b . Ich schliff mir zuerst Prismen, deren brechende Kante der Axe c parallel oder wenigstens nahezu parallel war, um das Gesetz der Brechungen in einer der beiden auf der Ebene der optischen Axen senkrechten Hauptebenen, hier der Ebene ab , zu untersuchen. Ein Prisma, in welchem die durchgehenden Strahlen nahezu der Axe b parallel gingen, ein zweites, worin der Weg der Strahlen ungefähr in der Mitte zwischen beiden Axen a und b lag, und ein drittes, in welchem sie na-

hezu die Richtung der Axe a verfolgten (unter der Voraussetzung, daß sie beim Durchgange ungefähr 45° mit den beiden Flächen des Prismas bildeten); ich werde diese drei Prismen der Reihe nach mit I., II., III. bezeichnen. An den Stücken Eisenvitriol, aus welchen ich die Prismen schliiff, waren nur sehr unvollkommen gebildete Krystallflächen vorhanden, und ich konnte daher die richtige Lage der zu schleifenden Flächen gegen die Krystallflächen, welche ich voraus berechnet hatte, nur mittelst des Hauy'schen Anlegegoniometers prüfen. Ich verband diese Prismen, deren brechende Flächen jede ungefähr 2 Linien im Quadrat maß, nicht einzeln auf die oben beschriebene Weise mit besonderen Glasprismen, sondern nachdem ich erst an jedes noch zwei Flächen senkrecht gegen die brechende Kante geschliffen, kittete ich die 3 Prismen mit diesen Flächen aneinander, so daß sie ein einziges breiteres Prisma bildeten, worauf ich noch behutsam die brechenden Flächen abschliiff, bis sie für alle 3 Prismen vollkommen in eine Ebene zusammenfielen. Um trotz des Mangels wohlgebildeter Krystallflächen die Lage der geschliffenen Flächen gegen dieselben und somit gegen die optischen Axen genauer zu bestimmen, schlug ich folgenden Weg ein. Ich bedeckte die beiden geschliffenen Flächen der Prismenreihe mit zwei Glasplatten, die ich an den Rändern mit Terpentinfirnis ankittete, und legte sie nun in eine gesättigte Auflösung von Eisenvitriol. Es setzten sich natürlich an die frei gebliebenen, unregelmäßig gestalteten Seiten der Prismen Krystallflächen an, die bei einem jeden Prisma ihrer Richtung nach der Lage desselben entsprachen, und ich konnte nun, nachdem ich die Prismen aus der Auflösung genommen und die geschliffenen Flächen von ihrer Bedeckung befreit hatte, die Winkel zwischen diesen und den angewachsenen Krystallflächen mit dem Reflectionsgoniometer messen. Diese angewachsenen Flächen waren zwar nicht vorzüglich, manche gaben sogar doppelte Bilder, dafür konnte ich aber, da sich mehrere verschiedene Flächen an jedes Krystallprisma angesetzt hatten, mehr Winkel messen, als zur Bestimmung der Lage der geschliffenen Flächen erforderlich waren, und diese unter einander ausgleichen, wobei keine Fehler über $10'$ nachblieben; größere Fehler werden also auch nicht in der Bestimmung der Lage der brechenden Flächen gegen die optischen Axen vorkommen.

§ 21. Aus diesen Bestimmungen nun lassen sich für jedes Prisma die Winkel berechnen, welche ein gebrochener Strahl mit den optischen Axen bildet, und die wir mit u und u' bezeichnen wollen. Nennen wir nämlich den Winkel φ , welchen ein

Strahl im Innern des Krystallprismas mit der Normale derjenigen brechenden Fläche bildet, die an das Glasprisma gekittet ist, so werden u und u_1 aus folgenden Formeln gefunden:

$$\cos u = k \cos(\psi + \varrho),$$

$$\cos u_1 = k_1 \cos(\psi_1 + \varrho),$$

in denen die Größen k , k_1 , ψ , ψ_1 für jedes Prisma besondere constante Werthe haben.

Ich hatte zwei gleiche Prismenreihen gebildet, um in der einen eine Controlle für die andere zu besitzen; die Werthe, welche den Größen k , k_1 , ψ , ψ_1 für die einzelnen Prismen dieser beiden Reihen zukommen, und die sich eben aus der Lage ihrer brechenden Flächen gegen die optischen Axen ergeben, sind in folgender Tafel enthalten:

	Erste Prismenreihe.			Zweite Prismenreihe.		
	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
$\log k$	9,8275	9,8332	9,8297	9,8236	9,8387	9,8374
ψ	45° 2'	0° 36'	— 43° 58'	49° 55'	— 83° 49'	— 40° 46'
$\log k_1$	9,8305	9,8247	9,8284	9,8344	9,8198	9,8212
ψ_1	43° 10'	0° 1'	— 44° 49'	47° 37'	— 89° 9'	— 35° 44'
	$\alpha = 90^\circ 39',0$			$\alpha = 91^\circ 2,8'$		

Mit α ist der brechende Winkel der Prismenreihe bezeichnet. Da man den Winkel ϱ bei Berechnung der Beobachtungen für jeden Strahl bestimmen muß, so findet man aus diesen Formeln für jeden Strahl sogleich die Winkel u und u_1 , auf die es bei der Untersuchung des Gesetzes der Brechungen ankommt. Diese Winkel beziehen sich hier übrigens auf die Seiten der optischen Axen, welche den stumpfen Winkel einschließen. Man sieht, daß bei keinem einzigen Prisma die brechende Kante genau der Elasticitätsaxe c parallel war, denn in diesem Falle müßte $k = k_1$ und $\psi = \psi_1$ sein.

Die beiden so zubereiteten Prismenreihen wurden nun jede für sich mit einem Glasprisma auf die oben angegebene Art vereinigt. Da der Eisenvitriol gar keine Erwärmung verträgt, so mußte ich mich des Terpentinfirnisses als Vereinigungsmittels bedienen, obgleich er die üble Eigenschaft besitzt, sehr langsam zusammenzutrocknen, und der Winkel zwischen den Flächen DB und AC (Fig. IV.) daher einer fortwährenden Veränderung unterworfen war. Die richtige Lage der Krystall- und Glasprismen gegen einander wurde dadurch leicht herbeigeführt, daß ich sie, ehe der Ter-

pentinfirnifs sich noch verhärtet hatte, an die Goniometeraxe brachte, und nun, wie bei Krystallwinkelmessung, die Flächen DB , BA und AC dieser Axe parallel stellte. Auch die Fläche DB wurde mit einer Glasplatte mittelst Terpentinfirnisses belegt, einmal, weil die geschliffenen Flächen des Eisenvitriols doch nicht durchsichtig genug waren, und dann auch, weil sie durch die geringste Berührung mit dem Finger, ja selbst durch die bloße Ausdünstung desselben ihren Glanz verloren. Ich hatte vor dieser Belegung den Winkel zwischen DB und AC gemessen, und durch Subtraction des Winkels DBA oder α daraus den Winkel BAC des Glasprismas sammt dem des kleinen Terpentinprismas AB gefunden; indem ich nun nach der Belegung wieder den Winkel zwischen DB und AC maß, gab mir der Unterschied dieses Werthes von dem früheren den Winkel des kleinen Glas- und Terpentinprismas DB .

Die Prismenreihe wurde bei der Beobachtung so an der Goniometeraxe eingestellt, daß jedesmal die Einfallfläche, und zwar der Punkt derselben, in welchem der mittelste Strahl sie traf, in der Axe lag. Auch die verlängerte Axe des Fernrohrs, durch welches ich beobachtete, ging so nahe als möglich durch die Goniometeraxe, obgleich dieses nicht vollkommen der Fall zu sein braucht. Um bei der Beobachtung an einem Prisma nicht durch die Bilder der danebenliegenden Prismen gestört zu werden, war ein kleiner Schirm von geschwärztem Papier zwischen dem Objectiv des Fernrohrs und der Prismenreihe aufgestellt, mit einem verticalen Einschnitt von der Breite eines Prismas, und dieser wurde jedesmal vor das der Beobachtung zu unterwerfende Prisma geschoben, so daß ich die Untersuchung an den 3 vereinigten Prismen der Reihe nach gleichförmig ausführen konnte, ohne das Fernrohr zu verrücken.

§ 22. Ehe ich nun an die Darlegung meiner Beobachtungen gehe, will ich noch die Berechnungsart auseinandersetzen, nach welcher ich die Werthe der Brechungscoefficienten und ihrer Differenz aus ihnen abgeleitet habe. Ich muß dabei bemerken, daß ich für beide Strahlen das Cartesische Brechungsgesetz angenommen habe, oder, was dasselbe heißt, daß ich an die Stelle der Strahlen die zu ihnen gehörigen Wellenebenen gesetzt; statt der Geschwindigkeiten der Strahlen, ihrer Richtungen und der Differenz ihrer Geschwindigkeiten finde ich auf diese Weise die Geschwindigkeiten der Wellenebenen, die Richtungen ihrer Normalen und die Differenz ihrer Geschwindigkeiten. Es ist jedoch leicht, aus diesen Größen jene herzuleiten, und wie wir aus den später anzustellenden theoretischen Untersuchungen ersehen werden, ist

dieses nicht einmal nöthig, um das Gesetz der Brechungen zu prüfen. Da auf diese Weise die Lage der Strahlen im Innern des Krystalls gänzlich aus der Betrachtung herausgebracht ist, so werde ich mich der Kürze wegen, ohne dafs es Zweideutigkeit veranlassen könnte, in der Folge immer des Ausdruckes Strahl bedienen, wo es eigentlich Normale der Wellenebene heifsen müfste.

Der Winkel zwischen dem auf die Fläche AC des Glasprismas einfallenden Strahle und ihrer Normale heifse j , der gebrochene Winkel i , der Winkel zwischen dem in das Krystallprisma eingedrungenen Strahle und der Normale der Fläche AB des Krystallprismas sei ϱ , und der Winkel, welchen der aus der Glasplatte DB herausgetretene Strahl mit der Normale der äufseren Fläche DB bildet, sei λ . Diese Winkel beziehen sich auf den Strahl, welcher im Krystall die Brechung, deren Coefficient n ist, erleidet, dieselben Winkel für den zweiten Strahl mit dem Brechungscoefficienten n' seien respective j' , i' , ϱ' und λ' . Der Winkel des Glasprismas heifse β ; der Winkel des kleinen Terpentinprismas AB sei p ; den Winkel des Krystallprismas haben wir α genannt; der Winkel des zweiten Terpentinprismas zwischen der Glasplatte und dem Krystall sei q , und der Winkel der beiden Flächen der Glasplatte DB heifse ξ . Die Winkel p , q und ξ sind positiv, wenn sie den Winkel α vergrößern. Der Brechungscoefficient des Glases sei m , und der des Terpentin μ .

Dann haben wir, wenn p , q und ξ als kleine Gröfsen angesehen werden, deren 3te Potenzen man vernachlässigen kann, folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin j &= m \cdot \sin i \\ m \cdot \sin(\beta - i - Ap) &= n \cdot \sin \varrho \\ n \cdot \sin(\alpha - \varrho + Bq + C\xi) &= \sin \lambda \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

in denen, wenn man $\sin t = \frac{m}{\mu} \sin(\beta - i)$, $\sin r = \frac{n}{\mu} \sin(\alpha - \varrho)$ und $\sin s = \frac{n}{m} \sin(\alpha - \varrho)$ setzt,

$$A = \frac{tg(\beta - i)}{tg t}, \quad B = \frac{tg(\alpha - \varrho)}{tg r}, \quad C = \frac{tg(\alpha - \varrho)}{tg s}.$$

Die Gröfsen A , B , C kann man, wenn mehrere Beobachtungen für dasselbe Prisma zu berechnen sind, füglich in kleine Tafeln bringen.

Setzen wir in den Gleichungen (1) für n , j , i , ϱ , λ respective n' , j' , i' , ϱ' , λ' , so gelten diese Gleichungen für die zweite Brechung, und für die Differenz der Brechungen entwickelt man aus ihnen folgende ganz strenge Formel:

$$n - n' = - \frac{2 \sin \frac{j-j'}{2} \cdot \cos \frac{j+j'}{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\varrho + \varrho'}{2} \right) \cdot \cos \left(\beta - \frac{i+i'}{2} - \frac{p}{A} \right)}{\cos \frac{i+i'}{2} \cdot \cos \frac{\varrho - \varrho'}{2} \cdot \sin \alpha} + \frac{2 \sin \frac{\lambda - \lambda'}{2} \cdot \cos \frac{\lambda + \lambda'}{2} \cdot \cos \frac{\varrho + \varrho'}{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\varrho + \varrho'}{2} \right)}{\cos \frac{\varrho - \varrho'}{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\varrho + \varrho'}{2} + \frac{q}{B} + \frac{z}{C} \right) \cdot \sin \alpha}; \quad (2)$$

hier ist zwar $A = \frac{tg \left(\beta - \frac{i+i'}{2} \right)}{tg \frac{t+t'}{2}}$, $B = \frac{tg \left(\alpha - \frac{\varrho + \varrho'}{2} \right)}{tg \frac{s+s'}{2}}$ etc., aber man kann offenbar

die Tafeln für A , B , C auch für diese Größen brauchen.

Ich berechnete nun auf indirectem Wege aus den Gleichungen (1) die absoluten Werthe der Brechungscoefficienten n und n' . In diesen Gleichungen sind mir nämlich j und λ , so wie auch α und β durch Beobachtung gegeben, auch m und μ werden als bekannt vorausgesetzt, und nur i , ϱ und n sind unbekannt; mit einem angenommenen Werthe von n berechnete ich aus j den Werth von λ , verglich diesen mit dem beobachteten, und corrigirte dann n und ϱ nach den Formeln

$$dn = d\lambda \cdot \cos \lambda \cdot \cos \varrho \quad \text{und} \quad d\varrho = - \frac{d\lambda \cdot \cos \lambda \cdot \sin \varrho}{n};$$

ebenso wurden die Werthe von i' , ϱ' und n' gefunden. Dann konnte ich die Differenz $n - n'$ aus der Formel (2) mit der größten Genauigkeit berechnen. Mit Hülfe der Winkel ϱ und ϱ' ließen sich auch die Winkel u und u' für beide Strahlen aus den § 21 gegebenen Formeln finden.

Ich muß noch bemerken, daß wenn nicht die 3te der beschriebenen Beobachtungsmethoden, sondern die 1ste oder 2te angewendet worden ist, und also nur j oder nur λ für die beiden Brechungen einen verschiedenen Werth hat, das eine Glied der Formel (2) wegfällt, das andere unverändert bleibt. Man darf jedoch nicht glauben, daß j immer der Winkel ist, welchen ich bei der Beschreibung der verschiedenen Beobachtungsmethoden den Einfallswinkel, und λ der, welchen ich den Austrittswinkel genannt habe; fällt der Strahl zuerst auf das Glasprisma, so ist j der Einfallswinkel und λ der Austrittswinkel; fällt der Strahl zuerst auf das Krystallprisma, so verhält es sich umgekehrt.

§ 23. Da ich die meisten Beobachtungen, wie schon erwähnt, nach der 3ten Methode ausgeführt habe, so will ich für diese auch kurz angeben, wie man aus den gemachten Ablesungen die Werthe der Einfalls- und Austrittswinkel für beide Brechungen herleitet. Alle Ablesungen beziehen sich hier auf den Kreis des Goniometers. Die Ablesung bei derjenigen Stellung des Kreises, bei welcher das durch die Brechung n erzeugte Bild der Spalte auf das Fadenkreuz des Fernrohrs fällt, sei P ; für das durch die Brechung n' erzeugte Bild sei sie P' ; die Ablesung bei derjenigen Stellung, in welcher das von der Einfallsebene reflectirte Bild der Spalte beobachtet wird, sei Q . Der Winkel zwischen der Spalte und der Marke, auf welche das Fernrohr bei den beiden Beobachtungen der gebrochenen Bilder gerichtet ist, sei φ , und der Winkel zwischen der Spalte und der Marke, welche die Richtung des Fernrohrs bei der Beobachtung des reflectirten Bildes anzeigt, sei ψ . Endlich sei δ der Winkel des vereinigten Prismas zwischen den Flächen AC und DB , so daß $\delta = \alpha - \beta + \xi + p + q$. Dann ist, wenn der Strahl in das Glasprisma einfällt:

$$j = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \pm (Q - P) \qquad \lambda = j + \varphi + \delta$$

$$j' = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \pm (Q - P') \qquad \lambda' = j' + \varphi + \delta$$

und wenn der Strahl in das Krystallprisma einfällt:

$$\lambda = \frac{\psi}{2} - 90^\circ \pm (Q - P) \qquad j = \lambda - \varphi - \delta$$

$$\lambda = \frac{\psi}{2} - 90^\circ \pm (Q - P') \qquad j' = \lambda - \varphi - \delta$$

Die Wahl der zweifelhaften Zeichen hängt von der Richtung der Theilung des Kreises ab.

An die Austrittswinkel muß noch eine Correction wegen der Dicke des Prismas angebracht werden, weil der Winkel φ , der so gemessen worden ist, als wenn sein Scheitel in der Goniometeraxe läge, eigentlich von dem einfallenden und austretenden Strahle in dem Punkte gebildet wird, wo diese sich durchschneiden. Messen wir die Dicke des Prismas in dem Punkte E in der Richtung senkrecht gegen AC , und bezeichnen den Winkel mit Δ , unter welchem diese Gröfse in der Entfernung der Spalte von der Goniometeraxe erscheint, so sind die Correctionen von λ und λ' , vorausgesetzt, daß dieses die Austrittswinkel sind,

$$-\frac{\Delta \sin(\lambda - \delta - \nu)}{\cos \nu} \quad \text{und} \quad -\frac{\Delta \sin(\lambda' - \delta - \nu')}{\cos \nu'},$$

sind hingegen j und j' die Austrittswinkel, so haben wir für diese die Correctionen

$$-\frac{\Delta \sin(j - \nu)}{\cos \nu} \quad \text{und} \quad -\frac{\Delta \sin(j' - \nu')}{\cos \nu'},$$

wo $\nu = \frac{\beta + i - \varepsilon}{2}$ und $\nu' = \frac{\beta + i' - \varepsilon'}{2}$, und diese Winkel nur höchst oberflächlich bekannt zu sein brauchen.

§ 24. Folgendes sind die angestellten Beobachtungen, nebst den aus ihnen gezogenen Resultaten:

Beobachtungen an der ersten Prismenreihe.

$$\alpha = 90^\circ 39',0; \quad \varepsilon = -6',4; \quad \Delta = 4',0.$$

Erste Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 18',3$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	55° 1',9	55° 1',1	54° 59',9
$j - j'$	— 5 34,3	— 4 35,6	— 3 8,7
λ	70 57,8	70 57,0	70 55,8
$\lambda - \lambda'$	— 5 34,6	— 4 35,9	— 3 8,9
n	1,48675	1,48678	1,48683
$n - n'$	0,014262	0,011637	0,007841
ω	0° 37'	0° 6'	0° 2'
ω'	87 47	64 12	47 50

Zweite Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 18',7$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	55° 11',1	55° 10',2	55° 9',8
$j - j'$	— 5 34,5	— 4 36,8	— 3 9,6
λ	71 5,0	71 4,1	71 3,7
$\lambda - \lambda'$	— 5 34,2	— 4 36,5	— 3 9,4
n	1,48636	1,48639	1,48641
$n - n'$	0,014310	0,011729	0,007911

Dritte Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 19',3$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	$55^\circ 85',9$	$55^\circ 8',9$	$55^\circ 7',7$
$j-j'$	$-5 33,0$	$-4 35,2$	$-3 7,7$
λ	$71 6,7$	$71 6,7$	$71 5,5$
$\lambda-\lambda'$	$-5 33,3$	$-4 35,5$	$-3 7,9$
n	1,48681	1,48681	1,48686
$n-n'$	0,014263	0,014672	0,007835

Vierte Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 18',8$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	$54^\circ 57',4$	$54^\circ 57',0$	$54^\circ 56',6$
$j-j'$	$-5 36,0$	$-4 37,2$	$-3 8,7$
λ	$70 47,4$	$70 47,0$	$70 46,6$
$\lambda-\lambda'$	$-5 35,7$	$-4 36,9$	$-3 8,5$
n	1,48670	1,48671	1,48673
$n-n'$	0,014250	0,014643	0,007803

Beobachtungen an der zweiten Prismenreihe.

$$\alpha = 91^\circ 2',8; \quad \xi = -5',7; \quad \Delta = 4',0.$$

Erste Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 50',4; \quad \lambda = \lambda' = 83^\circ 37',2$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	$60^\circ 43',7$	$60^\circ 45',4$	$60^\circ 43',9$
$j-j'$	$-2 47,4$	$-2 0,1$	$-1 35,5$
n	1,48721	1,48709	1,48720
$n-n'$	0,014169	0,010257	0,008204
ν	$0^\circ 43'$	$2^\circ 6'$	$1^\circ 22'$
ν'	$85 6$	$57 46$	$48 24$

Zweite Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 50',4$; $j = j' = 57^\circ 36',0$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
λ	$75^\circ 8',5$	$75^\circ 7',0$	$75^\circ 6',2$
$\lambda - \lambda'$	+ 4 21,0	+ 3 11,2	+ 2 37,8
n	1,48662	1,48655	1,48652
$n - n'$	0,014058	0,009993	0,008127
ω	$0^\circ 42'$	$2^\circ 5'$	$1^\circ 25'$
ω'	83 24	56 42	48 48

Dritte Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 48',3$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	$59^\circ 3',2$	$59^\circ 5',3$	$59^\circ 6',4$
$j - j'$	- 4 14,8	- 3 4,3	- 2 26,3
λ	$78 27,4$	$78 29,5$	$78 30,6$
$\lambda - \lambda'$	- 4 15,1	- 3 4,6	- 2 26,5
n	1,48660	1,48648	1,48643
$n - n'$	0,014203	0,010167	0,008027
ω	$0^\circ 42'$	$2^\circ 5'$	$1^\circ 24'$
ω'	85 3	57 39	48 29

Vierte Beobachtungsreihe. $\beta = 81^\circ 47',2$.

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
j	$56^\circ 0',9$	$56^\circ 2',7$	$56^\circ 4',5$
$j - j'$	- 5 18,7	- 3 50,8	- 3 5,7
λ	$72 22,8$	$72 24,6$	$72 26,4$
$\lambda - \lambda'$	- 5 18,4	- 3 50,5	- 3 5,5
n	1,48654	1,48647	1,48639
$n - n'$	0,014144	0,010105	0,008072
ω	$0^\circ 41'$	$2^\circ 4'$	$1^\circ 26'$
ω'	84 32	57 13	48 40

An diesen beiden Prismenreihen sind die kleinen Terpentinprismen p und q nicht besonders bestimmt worden, sondern der Winkel β schließt das eine und ξ das andere mit ein, und der Unterschied der Brechungen des Terpentins und des Glases ist also unberücksichtigt geblieben, daher in den zur Berechnung gegebenen Formeln p und $q = 0$ gesetzt werden müssen. Die Veränderung des Winkels β rührt von dem Zusammentrocknen des Terpentinfirnisses her. Der Brechungscoefficient m des Glases ist bei der ersten Prismenreihe $= 1,53958$, bei der zweiten Prismenreihe $= 1,53186$ angenommen worden; ich habe nämlich die Brechung des Glases nicht besonders bestimmt, sondern für jede der beiden Prismenreihen so gewählt, daß das Mittel der Werthe von n mit der später an einem einfachen Krystallprisma gemachten Bestimmung der Brechung des Eisenvitriols übereinstimmt, daher auch auf den absoluten Werth der Brechung n , der sich aus diesen Beobachtungen ergibt, gar kein Gewicht zu legen ist. Für beide Prismenreihen ist bei der ersten und dritten Beobachtungsreihe λ der Einfallswinkel und j der Austrittswinkel, und bei der zweiten und vierten verhält es sich umgekehrt. Die Austrittswinkel sind schon wegen der Dicke der Prismen corrigirt, und von dieser Correction rührt auch der kleine Unterschied zwischen $j - j'$ und $\lambda - \lambda'$ her. Die erste und zweite Beobachtungsreihe an der zweiten Prismenreihe sind die einzigen, welche ich nach der zweiten Beobachtungsmethode (§ 18) gemacht habe, daher bei der einen λ , bei der andern j für beide Brechungen denselben Werth hat. Die Winkel ω und ω' beziehen sich auf die Lage der Strahlen im Innern des Krystalls; es ist nämlich $\omega = \frac{u - u'}{2}$ und $\omega' = \frac{u' + u}{2}$, wo u und u' nach unserer früheren Bezeichnung die Winkel sind, welche der der Brechung n entsprechende Strahl mit den beiden optischen Axen macht, und u' und u dieselben Winkel für den zu der Brechung n' gehörenden Strahl. An der ersten Prismenreihe waren diese Winkel für die verschiedenen Beobachtungsreihen so wenig verschieden, daß für alle dieselben Werthe gelten konnten.

§ 25. Vergleichen wir nun die Resultate unserer Beobachtungen mit den Fresnel'schen Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung. Wir wollen mit a, b, c nicht bloß der Richtung, sondern auch der GröÙe nach die Fresnel'schen Elasticitätsaxen bezeichnen, so daß b und c die beiden Geschwindigkeiten der der Axe a parallel gehenden, c und a die Geschwindigkeiten der der Axe b parallel gehenden, und a und b der der

Ave c parallel gehenden Strahlen sind. Wären alsdann n und n' die Brechungscoefficienten der Lichtstrahlen, und bezögen sich die Winkel u , u , u' und u' auf die optischen Axen der Strahlen, so würden wir nach der Fresnel'schen Theorie folgende Formeln haben:

$$n^2 = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin^2 \omega, \quad n'^2 = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin^2 \omega',$$

$$n^2 - n'^2 = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega' + \omega) \sin(\omega' - \omega),$$

wo wie früher $\omega = \frac{u - u'}{2}$ und $\omega' = \frac{u' + u}{2}$.

Ich werde nun im Verlauf meiner theoretischen Untersuchungen darthun, daß wenn n und n' die Brechungen der Wellenebenen bezeichnen, und die Winkel u , u , u' , u' sich auf die optischen Axen der Wellenebenen beziehen, die Gesetze der doppelten Brechung, der Fresnel'schen Theorie gemäß, durch folgende Formeln ausgesprochen werden:

$$\frac{1}{n^2} = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \omega, \quad \frac{1}{n'^2} = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \omega'$$

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n'^2}{n^2 n'^2} = (a^2 - c^2) \sin(\omega' + \omega) \sin(\omega' - \omega).$$

Diesen Formeln müssen also die von uns beobachteten Brechungen und Differenzen der Brechungen anpassend sein. Aus der dritten haben wir

$$a^2 - c^2 = \frac{n^2 - n'^2}{n^2 n'^2 \sin(\omega' + \omega) \sin(\omega' - \omega)},$$

berechnen wir also das zweite Glied dieser Formel für die verschiedenen Prismen, so muß es für alle denselben Werth haben.

Werthe von $\frac{n^2 - n'^2}{n^2 n'^2 \sin(\omega' + \omega) \sin(\omega' - \omega)}$ oder $a^2 - c^2$.

		Prisma I.	Prisma II.	Prisma II.
Erste Prismenreihe.	1te Beobachtungs-Reihe	0,008819	0,008838	0,008759
	2te „ „ „	0,008855	0,008917	0,008844
	3te „ „ „	0,008819	0,008864	0,008751
	4te „ „ „	0,008813	0,008846	0,008719
	Mittel	0,008826	0,008866	0,008768
Zweite Prismenreihe.	1te Beobachtungs-Reihe	0,008804	0,008828	0,009000
	2te „ „ „	0,008798	0,008814	0,008826
	3te „ „ „	0,008839	0,008782	0,008800
	4te „ „ „	0,008818	0,008794	0,008826
	Mittel	0,008815	0,008805	0,008863
Mittel aus beiden Prismenreihen		0,008820	0,008835	0,008815

Bei der grossen Uebereinstimmung, welche sich in dem Mittel aus beiden Prismenreihen zwischen den Werthen von $a^2 - c^2$ für die drei verschiedenen Prismen findet, muß man sagen, daß die Resultate der Beobachtungen sich auf das Vollkommenste den theoretischen Gesetzen der Brechung anschliessen. Nicht weniger stimmen sie mit dem durch Beobachtung der Farbenringe ermittelten Werthe für den Winkel der optischen Axen überein. Denn die Differenz zwischen dem für $a^2 - c^2$ gefundenen Werthe 0,008820, welcher sich aus den beiden Prismen I. ergibt, in denen die Strahlen nahezu der Axe *b* parallel gehen, und dem Werthe 0,008815 aus den Prismen II., in denen die Strahlen nahezu die Richtung der Axe *a* verfolgen, entspricht einer Aenderung von nicht mehr als $+ 2'$ im Winkel der optischen Axen; und nehmen wir auch jede Prismenreihe für sich, so folgt aus der ersten eine Aenderung $+ 25'$, aus der zweiten eine Aenderung $- 21'$ in demselben Winkel. Wenn die Abweichungen der einzelnen Beobachtungsreihen von einander noch ziemlich groß sind, so muß man berücksichtigen, daß diese Beobachtungen die ersten waren, welche ich nach dieser Methode ausführte, und daß das Instrument, an dem ich sie machte, kaum eine Genauigkeit von $1'$ in der einzelnen Ablesung zuließ.

Da ich die drei zu einer Prismenreihe gehörigen Prismen, durch welche die Strahlen nach verschiedenen Richtungen in der Hauptebene ab durchgehen, unter gleichem Winkel abgeschliffen und mit demselben Glasprisma vereinigt, also überhaupt in ganz gleiche Umstände gebracht hatte, so werden wir aus den an ihnen gemachten Beobachtungen auch mit Sicherheit entscheiden können, ob die eine Brechung, welche nach der Fresnel'schen Theorie innerhalb einer Hauptebene constant sein muß, wirklich diesem Gesetze folgt, indem sie für die verschiedenen Prismen denselben Werth hat. Nehmen wir nun bei jeder Prismenreihe aus den an demselben Prisma gemachten Bestimmungen für n das Mittel, und corrigiren es noch um $+\left(\frac{a^2-c^2}{2c^3}\right)\sin^2\omega$ wegen der Abweichung der Strahlen von der Hauptebene ab , welche Correction nur bei Prisma I. und II. der zweiten Prismenreihe in Betracht kommt (bei dem einen ist sie $= 0,00002$ bei dem andern $= 0,00001$), so erhalten wir folgende

Werthe der constanten Brechung $\frac{1}{c}$			
	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.
Erste Prismenreihe	1,48665	1,48667	1,48671
Zweite Prismenreihe	1,48674	1,48667	1,48664
Mittel aus beiden	1,48670	1,48667	1,48668

Die Uebereinstimmung zwischen den drei Prismen ist hier wiederum so groß, daß die Constanz der einen Brechung entschieden daraus hervorgeht, und die Beobachtungen also auch von dieser Seite die Fresnel'schen Gesetze bestätigen. Was die Uebereinstimmung des absoluten Werthes der Brechung an den beiden Prismenreihen betrifft, so hat diese gar kein Gewicht, da sie auf der für jede Reihe verschiedenen angenommenen Brechnung des Glases beruht, wie denn überhaupt diese ganze Beobachtungsmethode nicht dazu geeignet ist, die absoluten Werthe der Brechungen zu bestimmen.

§ 26. Es läßt sich mit ziemlicher Gewißheit voraussetzen, daß die Brechungen in der Hauptebene bc denen in der Hauptebene ab analog sind, und sich also eben so vollkommen den Fresnel'schen Gesetzen anschließen, da diese beiden Ebenen in Beziehung auf die Unsymmetrie der zwei- und eingliedrigen Gestalt des Eisenvitriols eine analoge Lage haben. Nicht so verhält es sich mit der Hauptebene ac , in der

die optischen Axen liegen, und welche den Krystall symmetrisch theilt. Ich wollte daher auch in dieser Ebene das Gesetz der Brechungen besonders untersuchen, und wo möglich mit gröfserer Genauigkeit, als es mir bei den früheren Beobachtungen gelungen war. Zu diesem Zwecke schliif ich mir also 6 Prismen, deren brechende Kanten der Axe b parallel waren, und deren brechende Flächen verschiedene Richtungen gegen die Axe c hatten, unter einander aber rechte Winkel bildeten. Bei Prisma I. sollte der durchgehende Strahl den Winkel $+ 80^\circ$ mit der Axe c bilden, bei Prisma II. den Winkel $- 80^\circ$, bei Prisma III. $+ 45^\circ$, bei Prisma IV. $- 45^\circ$, bei Prisma V. $+ 10^\circ$ und bei Prisma VI. $- 10^\circ$ (das Zeichen $-$ bedeutet, dafs der Strahl auf der hinteren Seite der Axe c liegen soll, d. h. auf der Seite, auf welcher die hintere optische Axe (§ 14) liegt). Es ist hierbei angenommen, dafs der Strahl mit der Normale derjenigen brechenden Fläche des Prismas, welche mit dem Glasprisma vereinigt wird, einen Winkel von 50° bildet, denn dieses war bei den beiden früheren Prismenreihen ungefähr der mittlere Werth des Winkels ρ . Ich hatte diese symmetrische Vertheilung der Strahlen gewählt, um jede Unsymmetrie, welche sich im Gesetze der Brechungen finden sollte, um so leichter zu entdecken. Durch die Prismen III. und IV. geht offenbar der Strahl nahezu in der Richtung der vorderen und hinteren optischen Axe hindurch. Es liefs sich nun hieraus leicht bestimmen, unter welchen Winkeln die brechenden Flächen der Prismen, und namentlich die Fläche, welche mit dem Glasprisma vereinigt wurde, gegen den Blätterdurchgang geschliffen werden mufsten. Von dem Verfahren, welches ich früher anwandte, die Abweichungen der geschliffenen Flächen von ihrer richtigen Lage durch Messung der Winkel zwischen ihnen und den bei der Schleifung conservirten oder später angeschossenen Krystallflächen zu bestimmen, machte ich hier nicht Gebrauch, sondern suchte die Flächen der Prismen gleich so genau als möglich in der Lage zu schleifen, dafs ihre brechende Kante der Axe b parallel war; doch habe ich dieses Verfahren für bedeutend mühsamer erkannt, und würde in einem vorkommenden Falle wieder das frühere wählen. Ich schliif mir also zuerst Platten von ungefähr $1\frac{1}{2}$ Linie Dicke, deren Flächen auf der Axe b senkrecht oder der symmetrisch theilenden Ebene parallel waren, und liefs in der Lage derselben keinen Fehler von $10'$ nach. Nun schliif ich die brechenden Flächen unter einem rechten Winkel gegen einander, so dafs sie die ge-

hörige Lage gegen den Blätterdurchgang hatten und auf den Flächen der Platte senkrecht standen. Da ich auch hierin keinen Fehler von 10' nachliefs, und wir annehmen dürfen, dafs bei der Aneinanderkittung der Prismen die Lage eines einzelnen Prismas auch nicht um mehr als 10' fehlerhaft werden konnte, so würde das Maximum einer möglichen Abweichung des gebrochenen Lichtstrahls von der Ebene der optischen Axen auf 30' zu setzen sein. Ueber die Lage der brechenden Flächen gegen den Blätterdurchgang wurden genaue Messungen angestellt, deren Resultate in folgender Tafel enthalten sind:

	Prisma I.	Prisma II.	Prisma III.	Prisma IV.	Prisma V.	Prisma VI.
A	$+25^{\circ} 49',0$	$-54^{\circ} 16',0$	$-9^{\circ} 10',0$	$-19^{\circ} 15',5$	$+35^{\circ} 48',0$	$-64^{\circ} 15',5$
B	$-64 \quad 4,5$	$+35 \quad 42,4$	$-99 \quad 7,6$	$+70 \quad 35,5$	$+125 \quad 47,6$	$-154 \quad 19,2$
$\alpha = \pm(A-B)$	$89 \quad 53,5$	$89 \quad 58,4$	$89 \quad 57,6$	$89 \quad 51,0$	$89 \quad 59,6$	$90 \quad 3,7$

A ist der Winkel zwischen dem Blätterdurchgange und derjenigen brechenden Fläche, welche an das Glasprisma befestigt wird; B der Winkel zwischen dem Blätterdurchgange und der andern brechenden Fläche; α ist der brechende Winkel des Prismas. Da nun die Axe c gegen den Blätterdurchgang eine Neigung von $-14^{\circ} 16',5$ hat, so ist der Winkel, welchen der Strahl mit der Axe c bildet,

$$\text{für die Prismen I., III. und VI.} = 90^{\circ} - \varrho + A + 14^{\circ} 16',5$$

$$\text{,, ,, ,, II., IV. und V} = -90^{\circ} + \varrho + A + 14^{\circ} 16',5.$$

Setzt man in diesen Formeln $\varrho = 50^{\circ}$, so wird man finden, dafs der Winkel zwischen dem Strahl und der Axe c für jedes Prisma nahezu den Werth bekommt, welchen er nach der oben beschriebenen Lage der Prismen haben soll. Man leitet hieraus nun auch leicht Formeln für die Winkel ab, welche der Strahl in jedem Prisma mit den beiden optischen Axen macht; diese Winkel seien wie früher u und u' , und zwar auf diejenigen Seiten der vorderen und hinteren optischen Axe bezogen, welche den stumpfen Winkel einschliessen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
u	$87^{\circ} 40',7 - \varrho$	$7^{\circ} 35',7 + \varrho$	$52^{\circ} 41',7 - \varrho$	$42^{\circ} 36',2 + \varrho$	$82^{\circ} 20,3 - \varrho$	$177^{\circ} 36',2 - \varrho$
u'	$7 \quad 29,6 + \varrho$	$87 \quad 34,6 - \varrho$	$42 \quad 28,6 + \varrho$	$52 \quad 34,1 - \varrho$	$177 \quad 30,6 - \varrho$	$82 \quad 25,9 - \varrho$

§ 27. Diese Prismen wurden nun mit den auf der brechenden Kante senkrechten Flächen wie bei den früheren Prismenreihen aneinander gekittet, und damit diese

Flächen so vollkommen als möglich unter sich parallel zu stehen kamen, wurden sie mit zwei genau parallel gerichteten Glasflächen zusammengepresst. Da ich die Lage der brechenden Flächen für jedes Prisma schon bestimmt hatte, so konnte ich sie nach der Vereinigung nicht mehr gemeinschaftlich abschleifen, und es blieben daher kleine Abweichungen zwischen den Flächen der einzelnen Prismen, die eigentlich in einer Ebene liegen sollten, wodurch die Winkel der kleinen Terpentinprismen p und q für die verschiedenen Prismen verschiedene Werthe erhielten. Diese konnten jedoch leicht bestimmt werden. Nachdem ich nämlich die Prismenreihe mit einem Glasprisma, dessen brechender Winkel $\beta = 81^\circ 27',2$ war, vereinigt hatte, maß ich den Winkel zwischen der Fläche AC (Fig. IV.) des Glasprismas und der Fläche BD , welche aber für die verschiedenen Prismen eine etwas verschiedene Lage hatte. Die Werthe dieses Winkels, den wir δ nennen wollen, waren folgende:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
δ	$8^\circ 34',5$	$8^\circ 36',1$	$8^\circ 40',4$	$8^\circ 32',5$	$8^\circ 50',8$	$8^\circ 51',7$

Ziehen wir von diesen die respectiven Werthe von $\alpha - \beta$ ab, so erhalten wir die Winkel der kleinen Terpentinprismen p . Nachdem ich hierauf eine Glasplatte, deren Winkel $\xi = -12',2$ war, auf die Fläche DB mit Terpentinfirnifs befestigt hatte, wurde wieder der Winkel zwischen der Fläche des Glasprismas AC und der äußern Fläche der Glasplatte DB , welchen wir δ genannt haben, gemessen, er fand sich $= 9^\circ 3',8$. Ziehen wir nun von $\delta - \xi$ die Werthe von δ ab, so erhalten wir die Winkel der kleinen Terpentinprismen q . Es ergaben sich für p und q folgende Werthe:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Mittel.
p	$8',2$	$4',9$	$10',0$	$8',7$	$18',4$	$15',2$	$10',9$
q	$41,5$	$39,9$	$35,6$	$43,2$	$25,2$	$24,3$	$35,0$

Die Terpentinprismen trockneten nun sehr bedeutend zusammen, bevor ich noch die Beobachtungen an dieser Prismenreihe begann, und auch noch während derselben, was man an der Aenderung des Winkels δ erkennen konnte, der nach und nach um mehr als $30'$ abnahm. Es wurde mir hierdurch nicht die Aenderung der Prismen p und q für sich, sondern nur die Aenderung ihrer Summe gegeben, und ich mußte für die Aenderung der einzelnen Prismen p und q eine Hypothese machen. Am natürlichsten schien es mir anzunehmen, daß sich die mittleren Werthe derselben im

Verhältniß ihrer GröÙe änderten, und wenn also x die Aenderung des Winkels δ war, so corrigirte ich alle Prismen p um $\frac{11x}{46}$, und die Prismen q um $\frac{35x}{46}$.

§ 28. An den so vorbereiteten Prismenreihen wurden nun die Beobachtungen ganz eben so wie an den früheren, und zwar alle nach der dritten Methode angestellt, jedoch bediente ich mich dabei des vorzüglicheren Goniometers. Bei den ersten vier Beobachtungsreihen habe ich Lampenlicht angewendet, bei der fünften Reihe aber Sonnenlicht, das von einem Heliostat reflectirt wurde. Die Entfernung der Spalte, durch welche das Licht hineinfiel, vom Goniometer betrug ungefähr 22 Fufs.

Beobachtungen der Brechungen in der Ebene der optischen Axen.

$$\beta = 81^\circ 27',2; \xi = -12',2; \Delta = 3',0; m = 1,531935; \mu = 1,5252.$$

Erste Beobachtungsreihe. $dp = -7',0; dq = -22',7$.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
j	59° 59',4	60° 1',3	60° 3',4	60° 2',1	60° 0',7	61° 4',1
$j-j'$	3 2,00	3 1,55	0 21,25	0 18,60	-2 24,45	-2 25,95
λ	74 49,5	74 51,4	74 53,5	74 52,2	74 50,8	74 54,2
$\lambda-\lambda'$	3 1,84	3 1,39	0 21,23	0 18,58	-2 24,32	-2 25,82
n	1,47887	1,47886	1,47875	1,47873	1,47885	1,47877
$n-n'$	-0,007338	-0,007316	-0,000880	-0,000772	0,006126	0,006191
u'	37° 24',2	37° 54',7	3° 22',3	91° 56',9	33° 59',6	129° 13',6
u_i'	57 46,1	37 15,6	91 48,0	3 13,4	129 9,9	34 3,3

Zweite Beobachtungsreihe. $dp = -7',4; dq = -23',9$.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
j	59° 11',3	59° 14',4	59° 16',4	59° 14',0	59° 11',9	59° 16',4
$j-j'$	3 14,2	3 13,8	0 20,7	0 17,2	-2 34,6	-2 36,0
λ	73 16,7	73 9,8	73 21,8	73 19,4	73 17,3	73 21,8
$\lambda-\lambda'$	3 14,03	3 13,63	0 20,68	0 17,18	-2 34,47	-2 35,87
n	1,47884	1,47878	1,47868	1,47870	1,47884	1,47872
$n-n'$	-0,007293	-0,007276	-0,000801	-0,000667	0,006133	0,006191
u'	36° 55',7	58° 22',8	3° 1',2	92° 18',0	33° 43',3	128° 57',7
u_i'	58 14,6	36 47,5	92 9,1	2 52,3	128 53,6	33 47,4

Dritte Beobachtungsreihe. $dp = -7',5$; $dq = -24',1$.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
j	59° 13',6	59° 16',3	59° 18',2	59° 17',5	59° 14',8	59° 20',1
$j-j'$	3 13,76	3 12,86	0 19,88	0 17,43	-2 34,28	-2 34,48
λ	73 22,9	73 25,6	73 27,5	73 26,8	73 24,1	73 29,4
$\lambda-\lambda'$	3 13,90	3 13,00	0 19,90	0 17,45	-2 34,40	-2 34,60
n	1,47902	1,47899	1,47888	1,47884	1,47901	1,47886
$n-n'$	-0,007296	-0,007260	-0,000771	-0,000678	0,006142	0,006153
u'	36° 57',4	58° 21',0	3° 12',7	92° 16',2	33° 44',7	128° 59',0
u'_i	58 12,9	36 49',3	92 7,6	2 54,1	128 55,0	33 48,7

Vierte Beobachtungsreihe. $dp = -7',5$; $dq = -24',1$.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
j	53° 57',9	53° 61',1			53° 58',7	53° 63',9
$j-j'$	4 14,2	4 12,95			-3 21,0	-3 23,7
λ	65 22,5	65 25,7			65 23,3	65 28,5
$\lambda-\lambda'$	4 13,98	4 12,73			-3 20,82	-3 23,52
n	1,47895	1,47893			1,47893	1,47884
$n-n'$	-0,006968	-0,006933			0,005927	0,006013
u'	33° 48',8	61° 29',0			31° 47',4	127° 3',0
u'_i	61 21,5	33 41,3			126 57,7	31 52,7

Fünfte Beobachtungsreihe. $dp = -8',4$; $dq = -27',2$.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
j	57° 4',5	57° 4',9	57° 5',5	57° 5',3	57° 4',0	57° 6',7
$j-j'$	3 45,16	3 45,76	0 15,50	-0 13,33	-2 59,13	-3 0,5
λ	69 34,5	69 37,9	69 38,5	69 38,3	69 34,0	69 39,7
$\lambda-\lambda'$	3 44,96	3 45,50	0 15,48	0 13,32	-2 58,97	-3 0,34
n	1,47896	1,47892	1,47886	1,47879	1,47899	1,47887
$n-n'$	-0,007175	-0,007192	-0,000512	-0,000441	0,006089	0,006143
u'	35° 37',3	59° 41',3	2° 3',0	93° 15',8	32° 57',9	128° 12',9
u'_i	59 33,0	35 29,0	93 7,3	1 54,5	128 8,2	33 2,6

Die aus den Beobachtungen gezogenen Resultate sind hier nach den vollständigen im § 22 gegebenen Formeln berechnet. Die Brechung des Terpentinfirnisses ist besonders an einem kleinen zwischen zwei Glasplatten eingeschlossenen Prisma von diesem Stoffe bestimmt worden. Die Brechung des Glases m habe ich wiederum so angenommen, daß der mittlere Werth der Brechung n , welcher aus diesen Beobachtungen hervorgeht, mit der später an einem einfachen Krystallprisma gemachten Bestimmung der Brechung des Eisenvitriols übereinstimmt. Der Werth des brechenden Winkels α ist schon § 26 für die einzelnen Prismen gegeben worden. Mit dp und dq sind die Correctionen der kleinen Terpentinprismen bezeichnet, welche an die § 27 gegebenen Werthe von p und q anzubringen sind. Die Austrittswinkel sind schon wegen der Dicke der Prismenreihe corrigirt, und zwar ist bei allen Beobachtungsreihen, außer bei der dritten, λ der Austrittswinkel. Bei der vierten Beobachtungsreihe ging der Strahl in den Prismen III. und IV. so nahe der optischen Axe parallel (oder, richtiger gesagt, die Wellenebene fiel so nahe mit den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche zusammen), daß die beiden Bilder der Spalte in einander griffen, und daher nicht einzeln beobachtet werden konnten. Die Winkel u' und u'' beziehen sich auf den Strahl, welcher der Brechung n' folgt, für den andern braucht man diese Winkel nicht zu kennen, weil seine Brechung constant ist.

§ 29. Vergleichen wir nun die Resultate dieser Beobachtungen mit den theoretischen Gesetzen der doppelten Brechung. Für die constante Brechung in der Ebene der optischen Axen gilt die Formel

$$\frac{1}{n^2} = c^2 + (a^2 - c^2) \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2} = b^2,$$

wo ω der stumpfe Winkel der optischen Axen ist, also $= 95^\circ 10',3$ (siehe § 16), und für die veränderliche Brechung haben wir bei den Prismen I., II., III. und IV., wo der Strahl innerhalb des stumpfen Winkels der optischen Axen liegt, die Formel

$$\frac{1}{n'^2} = c^2 + (a^2 - c^2) \cdot \sin^2 \frac{u' - u''}{2},$$

bei den Prismen V. und VI., wo der Strahl außerhalb dieses Winkels liegt,

$$\frac{1}{n'^2} = c^2 + (a^2 - c^2) \cdot \sin^2 \frac{u' + u''}{2}$$

Berücksichtigen wir, daß für die vier ersten Prismen $\frac{\omega}{2} = \frac{u' + u}{2}$, und für die beiden letzten $\frac{\omega}{2} = \pm \frac{u' - u}{2}$, so erhalten wir für die Differenz der Brechungen die Formel:

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = \mp (a^2 - c^2) \cdot \sin u' \cdot \sin u,$$

woraus
$$n - n' = \mp \frac{n^2 n'^2}{n + n'} \cdot (a^2 - c^2) \cdot \sin u' \cdot \sin u,$$

Diese Formeln gelten, wie ich schon früher erwähnt, für die Brechungen der Wellenebenen, und diese sind uns auch durch die Beobachtungen gegeben.

Berechnen wir nun nach der letzten Formel mit dem an den beiden früheren Prismenreihen für $a^2 - c^2$ gefundenen Werthe 0,008820, und mit den obigen Angaben für die Winkel u' und u , die Werthe von $n - n'$ für die verschiedenen Prismen und die einzelnen Beobachtungsreihen, so erhalten wir folgende

Berechnete Werthe von $n - n'$.

	I.		II.		III.	
Beobachtungs-Reihe	$n - n'$	Differenz	$n - n'$	Differenz	$n - n'$	Differenz
erste	-0,007383	+ 45	-0,007371	+ 55	-0,000839	- 41
zweite	-0,007340	+ 47	-0,007327	+ 51	-0,000751	- 50
dritte	-0,007345	+ 49	-0,007333	+ 73	-0,000758	- 13
vierte	-0,007016	+ 48	-0,007002	+ 69		
fünfte	-0,007215	+ 40	-0,007201	+ 9	-0,000510	- 2
Mittel der Fehler		+ 46		+ 51		- 27

	IV.		V.		VI.	
Beobachtungs-Reihe	$n - n'$	Differenz	$n - n'$	Differenz	$n - n'$	Differenz
erste	-0,000802	+ 30	0,006145	- 19	0,006148	+ 43
zweite	-0,000714	+ 47	0,006125	+ 8	0,006128	+ 63
dritte	-0,000722	+ 44	0,006128	+ 14	0,006131	+ 22
vierte			0,005969	- 42	0,005975	+ 38
fünfte	-0,000474	+ 33	0,006068	+ 21	0,006073	+ 70
Mittel der Fehler		+ 38		- 4		+ 47

In den mit „Differenz“ überschriebenen Columnen sind die Abweichungen der beobachteten Werthe für $n - n'$ von den berechneten in Einheiten der sechsten Decimalstelle angegeben. Man sieht, dafs selbst bei diesen Beobachtungen zwischen den einzelnen Beobachtungsreihen Differenzen vorkommen, die bis auf 0,000064 steigen, z. B. bei den Prismen II. und V. Eine solche Abweichung setzt, wenn man sie blofs einer fehlerhaften Bestimmung der Differenz $j - j'$ oder $\lambda - \lambda'$ zuschreiben will, in dieser einen Fehler von beinahe 2' voraus. Das Vorkommen so grofser Fehler kann ich mir nur aus der Beschaffenheit der Bilder, welche ich beobachtete, erklären. Wegen der auferordentlichen Kleinheit meiner Prismen nämlich, von deren brechenden Flächen manche wenig gröfser, manche sogar kleiner als eine Quadratlinie waren, erschienen die gebrochenen Bilder der Spalte nicht allein ziemlich undeutlich, besonders bei Anwendung von Lampenlicht, sondern sie hatten auch eine Diffraction erlitten, so dafs sie, obgleich achromatisch, doch erweitert erschienen, und bei Sonnenlicht sogar die gefärbten Nebenbilder sichtbar wurden. Die Erweiterung der Bilder wäre zwar an und für sich kein Hindernifs in der Genauigkeit der Einstellung gewesen; es zeigte sich jedoch bei einigen Prismen noch ein anderes Phänomen, von dem ich den Grund nicht anzugeben weifs. Das Bild der Spalte nämlich, welches als ein weifser horizontaler Streifen erschien, war durch einen schmäleren schwarzen Strich in zwei nicht ganz gleich breite Streifen getheilt. Hierdurch wurde nun die Bissection der Bilder schwierig, und man konnte, besonders bei verschiedenen Lichtintensitäten, die Mitte der Bilder leicht verschieden schätzen; man wird auch bemerken, dafs bei der fünften Beobachtungsreihe, die mit Sonnenlicht angestellt ist, die gröfsten Abweichungen von den übrigen vorkommen. An den Prismen, deren Bilder von diesem Fehler frei waren, z. B. I. und IV., sehen wir dagegen eine ungleich gröfsere Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen; bei Prisma I. ist die gröfste Abweichung, welche vorkommt, 0,000009. Die Beobachtungsmethode, welche ich angewendet habe, läfst also gewifs, wenn nur die Prismen fehlerlos und nicht gar zu klein sind, eine sehr grofse Genauigkeit in der Bestimmung der Differenz der Brechungen zu.

§ 30. Abgesehen aber von den einzelnen Beobachtungsfehlern, bemerken wir, dafs auch die Mittel dieser Fehler, welche als die Abweichungen der durch die Beobachtungen gefundenen Resultate von den Gesetzen der Brechung angesehen werden müssen, nicht unbedeutend sind. Berücksichtigt man die Lage der verschiedenen

Prismen gegen die optischen Axen, so übersieht man leicht, daß bei den Prismen III. und IV., in denen die Strahlen nur wenige Grade von den optischen Axen abweichen, die Verschiedenheit der Abweichungen $+27$ und -38 leicht aus einer nur wenige Minuten fehlerhaft angenommenen Lage der Prismen gegen die Strahlen oder gegen die optischen Axen erklärt werden kann; und wir werden später erkennen, daß dieses auch wirklich der Grund ist, indem ich die Lage der optischen Axen an diesen beiden Prismen direct bestimmt habe. Nicht so verhält es sich aber mit den ersten beiden und den letzten beiden Prismen, bei denen die Strahlen mehr in der Nähe der Elasticitätsaxen a und c durchgehen. Die Ungleichheit in den Abweichungen der Prismen V. und VI., nämlich -4 und $+47$, würde sich nur durch eine Aenderung von $40'$ in der Lage der Prismen oder in den Winkeln u' und u , ausgleichen lassen, ein Fehler, der gar nicht zu statuiren ist; eben so würde die Verschiedenheit zwischen dem Mittel der Prismen V. und VI. und dem der Prismen I. und II. eine Aenderung von $17'$ im Winkel der optischen Axen verlangen. Da ich jedoch aus Mangel an Zeit nicht im Stande gewesen bin, eine zweite ähnliche Prismenreihe anzufertigen, die als Controlle für diese hätte dienen können, so müssen wir wohl mit Rücksicht auf die noch größeren Differenzen, welche sich zwischen den beiden früheren Prismenreihen vorfinden, alle diese Abweichungen als zufällige Unregelmäßigkeiten der einzelnen Krystalle ansehen.

Unter dieser Voraussetzung können wir nun aus den vorliegenden Beobachtungen, unabhängig von den früheren, sowohl den Werth von $a^2 - c^2$, als den Winkel der optischen Axen und die Lage der Elasticitätsaxe c gegen den Blätterdurchgang bestimmen. Bezeichnen wir mit x , y und z die Correctionen dieser 3 Elemente, so daß x die Zunahme des Werthes von $a^2 - c^2 = 0,008820$ in der 6ten Decimalstelle, y die Zunahme des stumpfen Winkels der optischen Axen, welcher $= 95^\circ 10',3$, und z die Zunahme des Winkels $14^\circ 16',5$ bezeichnet, welchen die Axe c mit dem Blätterdurchgange bildet, beide Correctionen in Minuten ausgedrückt, so erhalten wir folgende den 6 Prismen entsprechende Gleichungen:

Nachbleibende Fehler.

$0,83x + 2,08y + 1,55z + 46 = 0$	+ 6
$0,83x + 2,08y - 1,55z + 51 = 0$	- 5
$0,08x + 2,08y + 4,15z - 27 = 0$	- 34
$0,08x + 2,08y - 4,15z + 38 = 0$	- 11
$0,70x - 2,08y - 1,25z + 4 = 0$	+ 6
$0,70x - 2,08y + 1,25z - 47 = 0$	- 33

aus denen sich, wenn wir ihnen, gemäß den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Mittel, ein verschiedenes Gewicht ertheilen, nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$x = -25 \quad y = -13,2 \quad z = +5,1.$$

Offenbar ist die Gröfse x vorzugsweise durch die beiden ersten und die beiden letzten Gleichungen bestimmt, und die Gröfse z durch die beiden mittleren. Es ergäbe sich demnach an dieser Prismenreihe für $a^2 - c^2$ der Werth 0,008795; die Bestimmungen der beiden andern Elemente haben zu wenig Gewicht im Vergleich mit den aus der Beobachtung der Farbenringe hervorgegangenen. Die Correction z erklärt sich, wie wir im folgenden § sehen werden, aus einer bei den Prismen III. und IV. etwas fehlerhaft angenommenen Lage der Strahlen gegen die optischen Axen, und y könnte auf einer zufälligen Unregelmäßigkeit der Prismen beruhen, indem die Prismen IV. und V., bei denen die Strahlen in der Nähe der Elasticitätsaxe c durchgehen, einen gröfseren Werth für $a^2 - c^2$ geben als die Prismen I. und II., in denen die Strahlen in der Nähe der Axe a ihren Weg nehmen, wenn man nicht etwa diese Verschiedenheit als eine Abweichung von den Fresnel'schen Gesetzen ansehen will.

Es ist uns noch übrig, die Constanz der Brechung $n = \frac{1}{b}$ in der Ebene der optischen Axen zu prüfen. Nehmen wir das Mittel aus den Beobachtungen an jedem Prisma für sich, so erhalten wir folgende

Werthe der constanten Brechung $\frac{1}{b}$.					
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1,47893	1,47889	1,47879	1,47877	1,47893	1,47881

Die Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Prismen ist auch hier sehr grofs, indem keine gröfsere Differenz als 0,00016 vorkommt, und obgleich die Brechungen an den beiden mittleren Prismen, wo die Strahlen in der Nähe der optischen Axen

durchgehen, kleiner zu sein scheinen, so ist dieser Unterschied doch zu gering, um daraus Folgerungen für die Gesetze der Brechung ziehen zu können.

§ 31. Ich versuchte nun noch, die Lage der optischen Axen an den Prismen III. und IV. unmittelbar durch Beobachtung der gleichen Brechungen zu bestimmen, um zu sehen, ob sie mit den an diesen beiden Prismen gemachten Beobachtungen der Differenz der Brechungen im Einklange wären. Das wirkliche Zusammenfallen beider Bilder hätte sich, wie man leicht einsieht, nur sehr ungenau ermitteln lassen, und ich zog es daher vor, gleiche Abstände der Bilder bei einer geringen Abweichung der Strahlen auf die eine und die andere Seite der optischen Axe zu beobachten. Um dieses mit Genauigkeit bewerkstelligen zu können, setzte ich an die Stelle der einen Spalte, durch welche das Sonnenlicht hineinfiel, zwei parallel übereinanderliegende Spalten, die sehr fein waren und nur wenig von einander abstanden; ihr scheinbarer Abstand betrug 3,4 Minuten. Von diesen Spalten deckte ich bei der einen die linke, bei der andern die rechte Hälfte zu, die nachbleibenden Hälften derselben lagen also nebeneinander, aber zugleich die eine um 3',4 höher als die andere. Von jeder der beiden Spalten wurden nun, wenn der Strahl nicht in der Richtung einer der optischen Axen durch den Krystall ging, zwei Bilder erzeugt, und da auf der einen Seite der optischen Axe (näher zur Elasticitätsaxe a hin) die Brechung n' gröfser als n , auf der andern Seite (näher zur Elasticitätsaxe c hin) die Brechung n gröfser als n' ist, so konnte ich das Prisma einmal so drehen, dafs das durch die Brechung n' erzeugte Bild der höheren Spalte mit dem durch die Brechung n erzeugten Bilde der niedrigeren Spalte zusammenfiel, und dann wiederum so, dafs das durch die Brechung n erzeugte Bild der höhern Spalte mit dem durch die Brechung n' erzeugten Bilde der niedrigeren Spalte zusammenfiel. Unter dem Zusammenfallen der Bilder verstehe ich hier, dafs sie in gleicher Höhe erschienen, und also einen einzigen horizontalen Lichtstreif bildeten, was darum mit grofser Genauigkeit beobachtet werden konnte, weil die Bilder unmittelbar nebeneinander lagen. Die Strahlen gingen bei diesen beiden Stellungen des Prismas auf verschiedenen Seiten der optischen Axe durch dasselbe hindurch, und die durch die beiden Brechungen erzeugten Bilder ein und derselben Spalte hatten auf beiden Seiten einen gleichen Abstand von einander, nämlich 3,4 Minuten. Die Beobachtungen wurden ganz auf dieselbe Weise ausgeführt, wie die zur Bestimmung der Brechungen, und zwar nach der 3ten Methode (§ 18). Das

Fernrohr stellte ich jedesmal genau auf die Mitte der zusammenfallenden Bilder ein, statt aber bei jeder Beobachtung eine Marke in der Richtung der Sehlinie an der Wand zu befestigen, hatte ich an der Stelle, wo die Bilder an der Wand erschienen, einen vertikalen, auf Papier verzeichneten Maafsstab angebracht, dessen Theilstriche ungefähr 2 Minuten von einander abstanden. Ich drehte nun nach der Einstellung des Fernrohrs die Prismenreihe so, dafs ich bei derselben vorbei den Maafsstab durch das Fernrohr sehen konnte, und las auf demselben die Zehntel der Theile ab. Indem ich hernach die Winkel zwischen den beiden Spalten und einigen Theilstrichen des Maafsstabes mafs, konnte ich durch Interpolation für jede Beobachtung die Ablenkung der gebrochenen Strahlen finden. Folgende drei Beobachtungsreihen habe ich nach dieser Methode ausgeführt.

Erste Beobachtungsreihe. $dp = -8',4$; $dq = -27',0$.

	Prisma III.		Prisma IV	
	$n' > n$	$n' < n$	$n' > n$	$n' < n$
j	55° 15',3	49° 30',3	55° 47',9	50° 23',9
$\lambda = \lambda'$	66 58,3	59 18,5	67 45,6	60 26,5
ϱ'	51 25,3	54 19,9	51 11,2	53 53,1
n	1,47890	1,47891	1,47888	1,47882
$j - j'$	+ 3',4	- 3',4	+ 3',4	- 3',4
$n - n'$	- 0,000342	+ 0,000373	- 0,000340	+ 0,000369

Zweite Beobachtungsreihe. $dp = -8',4$; $dq = -27',1$.

	Prisma III.		Prisma IV	
	$n' > n$	$n' < n$	$n' > n$	$n' < n$
j	55° 16',7	49° 27',0	55° 50',2	50° 29',8
$\lambda = \lambda'$	67 0,3	59 14,0	67 48,1	60 34,6
ϱ'	51 24,5	54 21,7	51 10,3	53 49,7
n	1,47893	1,47890	1,47884	1,47888

Dritte Beobachtungsreihe. $dp = -8',4$; $dq = -27',2$.

	Prisma III.		Prisma IV	
	$n' > n$	$n' < n$	$n' > n$	$n' < n$
j	55° 16',3	49° 35',4	55° 51',0	50° 27',2
$\lambda = \lambda'$	66 59,2	59 24,4	67 48,6	60 30,8
ϱ'	51 24,8	54 17,2	51 10,0	53 51,2
n	1,47891	1,47890	1,47882	1,47887

Diese Beobachtungen sind ebenfalls nach den im § 22 aufgestellten Formeln berechnet. Die Correctionen dp und dq beziehen sich auf die § 27 für p und q gegebenen Werthe. In den mit $n' > n$ überschriebenen Columnen sind die auf denjenigen Strahl sich beziehenden Winkel enthalten, welcher von der optischen Axe in der Richtung zur Elasticitätsaxe a hin abweicht, in den Columnen $n' < n$ hingegen die Winkel, welche zu dem von der optischen Axe zur Elasticitätsaxe c hin abweichenden Strahle gehören. Dieses gilt für beide Prismen, nur ist es beim Prisma III. die vordere, beim Prisma IV die hintere optische Axe. Die Gröfse $n - n'$ ist nach der Differentialformel

$$n - n' = -dj \cdot \frac{\cos j \cdot \cos(\alpha - \varrho') \cdot \cos(\beta - i)}{\cos i}$$

berechnet, in welcher $dj = \sin(j - j')$ gesetzt ist, und sie hat ebenso wie die Gröfse $j - j'$ für alle drei Beobachtungsreihen dieselben Werthe.

§ 32. Es kam offenbar bei diesen Beobachtungen hauptsächlich auf die Bestimmung des Winkels ϱ' an, von welchem die Lage des die veränderliche Brechung erleidenden Strahls im Innern des Krystalls abhängt. Der Werth dieses Winkels ist uns bei beiden Prismen für den auf der einen und auf der anderen Seite der optischen Axe liegenden Strahl gegeben, und dürften wir also annehmen, dafs der Strahl auf beiden Seiten gleichweit von der optischen Axe abweiche, so würde das Mittel aus beiden Werthen von ϱ' , welche zu einem Prisma gehören, uns die Lage der optischen Axe in diesem bestimmen. Die Gleichheit der Abweichungen des Strahls zu beiden Seiten der optischen Axe findet aber nur annäherungsweise Statt, und wir wollen daher untersuchen, wie sich ein ganz genaues Resultat aus diesen Beobachtungen ziehen läfst.

Wir wollen mit x die Gröfse bezeichnen, welche wir zu dem kleineren Werthe von ρ' , der zu $n' > n$ gehört, hinzufügen müssen, um den der optischen Axe entsprechenden Werth von ρ' zu erhalten, und mit x' den Winkel, welchen wir zu demselben Zwecke von dem größeren Werthe von ρ' abziehen müssen, so dafs $x + x' =$ der Differenz der beiden gegebenen Werthe von ρ' , welche Differenz wir mit ϑ bezeichnen wollen. Dann sei $-\Delta$ der negative Werth von $n - n'$, und Δ' der positive Werth. Das Gesetz für die veränderliche Brechung der Wellenebenen in der Ebene der optischen Axen wird durch die Formel

$$\frac{1}{n'^2} = a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi$$

dargestellt, wo φ der Winkel ist, welchen der Strahl (eigentlich die Normale der Wellenebene) mit der Axe a bildet. Differentiren wir diese Gleichung zweimal in Bezug auf φ , so erhalten wir:

$$d\left(\frac{1}{n'^2}\right) = (a^2 - c^2) \sin 2\varphi \, d\varphi \quad \text{und} \quad d^2\left(\frac{1}{n'^2}\right) = 2(a^2 - c^2) \cos 2\varphi \, d\varphi^2$$

und es ergibt sich aus diesen Formeln, wenn wir

$$(a^2 - c^2) \sin \omega = P \quad \text{und} \quad (a^2 - c^2) \cos \omega = Q$$

setzen, wo ω der stumpfe Winkel der optischen Axen ist,

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = P d\varphi + Q d\varphi^2$$

mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $d\varphi$, welche Gröfse hier die Abweichung des Strahls von der optischen Axe bezeichnet. Da nun

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^3} (n - n') + \frac{3}{n^4} (n - n')^2 + \text{etc.},$$

so können wir für $\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}$ setzen $-\frac{2}{n^3} \Delta$ und $\frac{2}{n^3} \Delta'$, indem Δ^2 und Δ'^2 ganz verschwindend sind; wir müssen aber dem entsprechend für $d\varphi$ respective $-x$ und x substituiren, woraus hervorgeht:

$$-\frac{2}{n^3} \Delta = -Px + Qx^2$$

$$\frac{2}{n^3} \Delta' = Px' + Qx'^2$$

und durch Umkehrung:

$$x = \frac{2\Delta}{n^3 P} + \frac{4\Delta^2 Q}{n^6 P^3} \quad \text{und} \quad x' = \frac{2\Delta'}{n^3 P} - \frac{4\Delta'^2 Q}{n^6 P^3}.$$

Addiren wir beide Gleichungen, so erhalten wir

$$x + x' = \vartheta = \frac{2}{n^3 P} (\Delta + \Delta') - \frac{4Q}{n^6 P^3} (\Delta'^2 - \Delta^2)$$

und daraus

$$\frac{2}{n^3 P} = \frac{\vartheta}{\Delta' + \Delta} + \frac{Q(\Delta' - \Delta) \vartheta^2}{P(\Delta' + \Delta)^2}$$

und substituiren wir diesen Werth wieder in die Gleichungen für x und x' , so ergibt sich nach den gehörigen Reductionen:

$$x = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta' + \Delta} + \frac{Q \Delta \Delta' \vartheta^2}{P(\Delta' + \Delta)^2} \quad \text{und} \quad x' = \frac{\Delta' \vartheta}{\Delta' + \Delta} - \frac{Q \Delta \Delta' \vartheta^2}{P(\Delta' + \Delta)^2}.$$

Es versteht sich von selbst, daß das zweite Glied, welches ϑ^2 enthält, wenn ϑ in Minuten ausgedrückt ist, noch mit $\sin 1'$ multiplicirt werden muß, oder setzen wir einfacher $\vartheta \cdot \sin \vartheta$ für ϑ^2 , und berücksichtigen, daß $\frac{Q}{P} = \frac{1}{tg^2 \omega}$ und $\frac{\Delta \Delta'}{(\Delta' + \Delta)^2}$ immer sehr nahe $= \frac{1}{4}$, so erhalten wir:

$$x = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta' + \Delta} + \frac{\sin \vartheta \cdot \vartheta}{4 tg^2 \omega} \quad \text{und} \quad x' = \frac{\Delta' \vartheta}{\Delta' + \Delta} - \frac{\sin \vartheta \cdot \vartheta}{4 tg^2 \omega}.$$

Wir brauchen eigentlich zur Bestimmung der Lage der optischen Axe nur eine dieser Formeln. Zu Folge der ersten Beobachtungsreihe ist am Prisma III. der kleinere Werth von $\delta' = 51^\circ 25'3$, der größere $= 51^\circ 19'9$, also $\vartheta = 2^\circ 54'6$; aber $\frac{\Delta}{\Delta' + \Delta}$ ist $= \frac{342}{715}$, demnach wird das erste Glied von $x = 1^\circ 23'5$. Das zweite Glied wird,

da $\frac{\sin \vartheta \cdot \vartheta}{4} = 2'2$ und $tg^2 \omega$ ungefähr gleich $= -11, = -0'2$, es kann also beinahe vernachlässigt werden; man sieht jedoch zugleich, daß es nur darum so gering wird, weil $tg^2 \omega$ so groß, oder der Winkel der optischen Axen so nahe an 90° ist; ist dieser klein, so kann das zweite Glied sehr bedeutend werden. Wir haben somit $x = 1^\circ 23'3$, und addiren wir dieses zu dem kleineren Werthe von δ' , so erhalten wir $52^\circ 48'6$ für den Winkel ϑ , welcher der vorderen optischen Axe im Prisma III. entspricht, sein Complement $37^\circ 11'4$ ist der Winkel zwischen dieser optischen Axe und derjenigen brechenden Fläche des Prismas, welche an das Glasprisma gekittet ist; ziehen

wir also hiervon den Winkel $9^{\circ} 10',0$ ab, welchen diese Prismenfläche (siehe § 26) mit dem Blätterdurchgange bildet, so erhalten wir $28^{\circ} 1',4$ für den Winkel zwischen der vorderen optischen Axe und dem Blätterdurchgange. Bei dem Prisma IV., an welchem die Lage der hinteren optischen Axe bestimmt wird, ist die Berechnung ganz dieselbe, nur muß der Winkel $19^{\circ} 15,5$ (§ 26) hier nicht abgezogen, sondern hinzugefügt werden. Berechnen wir nach dieser Methode die drei Beobachtungsreihen, so ergeben sich folgende Werthe für die

Winkel zwischen den optischen Axen und dem Blätterdurchgange.

Beobachtungsreihe	Prisma III.	Prisma IV
	Vordere optische Axe.	Hintere optische Axe.
erste	$28^{\circ} 1',4$	$56^{\circ} 46',8$
zweite	$28 \quad 1,0$	$56 \quad 48,9$
dritte	$28 \quad 3,0$	$56 \quad 48,3$
Mittel	$28 \quad 1,8$	$56 \quad 48,0$

Also der spitze Winkel der optischen Axen = $84^{\circ} 49',8$, und der Winkel zwischen der Axe c und dem Blätterdurchgange = $-14^{\circ} 23',1$.

Der Winkel der optischen Axen stimmt sonderbarer Weise auf das Genaueste mit dem aus der Beobachtung der Farbenringe abgeleiteten Werthe desselben (§ 16) überein, aber der Winkel zwischen der Mittellinie und dem Blätterdurchgange ist um $6',6$ größer. Letzteres erklärt nun die Correction von $5',1$, welche die Beobachtungen der Brechungsdifferenzen für diesen Winkel verlangten, und welche vorzugsweise durch die Prismen III. und IV. bestimmt wurde, und es leuchtet hieraus ein, daß diese Correction nicht auf einer Abweichung von den Gesetzen der Brechung beruht, sondern mit der Lage der optischen Axen in diesen beiden Prismen im Einklange ist.

An und für sich aber, d. h. ohne Beziehung auf die übrigen an diesen beiden Prismen angestellten Beobachtungen, können wir den so eben gemachten Bestimmungen der Winkel zwischen den optischen Axen und dem Blätterdurchgange nur ein geringes Gewicht beilegen, da die Lage der Prismen selbst dazu nicht hinreichend sicher bestimmt war. Denn diese hängt offenbar von der Größe der kleinen Terpeninprismen p und q ab, über deren Veränderung durch das Zusammentrocknen ich nur eine wahrscheinliche, aber nicht mit Gewißheit begründete Hypothese aufgestellt

hatte. — Ich muß jedoch auf die geringen Abweichungen zwischen den Resultaten der einzelnen Beobachtungen aufmerksam machen, welche nicht 2' übersteigen, und aus denen hervorgeht, daß die angewendete Methode, unter Voraussetzung einer sicheren Kenntniß der Lage der Prismen, eine große Genauigkeit in der Bestimmung der Richtung der optischen Axen zuläßt, wobei der vortheilhafte Umstand nicht zu übersehen ist, daß man nach derselben Methode und an denselben Prismen auch Beobachtungen über die Brechungen anstellen kann, und so bei der Erforschung der Gesetze der Brechungen weniger von den Abweichungen der Beobachtungen und der Unregelmäßigkeit der einzelnen Krystalle abhängig ist.

§ 33. Es bleibt mir nun noch übrig, die Beobachtungen anzuführen, welche ich zur Bestimmung der absoluten Brechung des Eisenvitriols angestellt habe. Hierbei kam es offenbar darauf an, ein einfaches Krystallprisma zu haben, um von der Bestimmung anderer Elemente, z. B. der Brechung des Glases u. s. w., frei zu sein. Zu diesem Zwecke wählte ich einen durchsichtigen Krystall, an dem die Fläche b (der Blätterdurchgang) und die Fläche ν vorhanden waren. Diese bildeten schon ein natürliches Prisma, dessen brechende Kante der Elasticitätsaxe b parallel, und bei dem auch die Lage der brechenden Flächen gegen die optischen Axen bekannt war. Ich polirte nun die Krystallflächen noch etwas vollkommener ab, und maß den brechenden Winkel, welchen ich $= 43^\circ 48',45$ fand. Die Beobachtungen wurden wieder ganz nach der § 18 beschriebenen dritten Beobachtungsmethode angestellt, und ich ließ die Lichtstrahlen nahezu in der Richtung durch das Prisma gehen, wo die Ablenkung derselben im Minimum ist, oder wo der einfallende und austretende Strahl gleiche Winkel mit den beiden brechenden Flächen bilden. Diese Stellung brachte noch den Vortheil mit sich, daß bei ihr die Strahlen im Innern des Krystalls wenig von der Richtung der Axe a abwichen, und ich also unmittelbar die beiden Brechungen $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ bestimmte. Trotz aller Mühe, die ich auf die Politur der Flächen verwendet hatte, war ich doch nicht im Stande, durch dieses Prisma eine der Frauenhofer'schen schwarzen Linien im Spectrum zu erkennen, und ich mußte mich also damit begnügen, das Fernrohr auf die Mitte des Grüns im Spectrum zu richten. Die Beobachtungen sind nach den Formeln

$$\sin i = n \sin \rho, \quad n \sin (\alpha - \rho) = \sin (\phi + \alpha - i)$$

berechnet, wo i den Einfallswinkel bezeichnet, ρ den gebrochenen Winkel, α den Win-

kel des Prismas, und φ die Ablenkung der Strahlen oder den Winkel zwischen dem einfallenden und austretenden Strahl. Ich habe folgende fünf Beobachtungen gemacht:

φ	i	i'	n	n'	$\frac{u' - u_i'}{2}$	Correct. von n'
23° 41,5	42° 17,7	37° 46,6	1,47865	1,48682	5° 12'	12
23 49,75	43 24,5	39 43,4	1,47855	1,48679	4 4	7
23 49,45	24 24,1	27 48,6	1,47887	1,48646	11 14	55
23 59,75	44 32,3	41 27,1	1,47866	1,48677	3 5	4
23 59,75	23 18,6	26 3,8	1,47871	1,48606	15 20	66

An den Winkel φ muß noch die Correction $-\frac{\cos(\varphi + \varrho - i) \cos \alpha}{\cos(\alpha - \varrho)} \cdot \Delta$ wegen der Dicke des Prismas angebracht werden, wo $\Delta = 2', 2$. Da n die constante Brechung ist, und die Strahlen in der Ebene der optischen Axen liegen, so ist $n = \frac{1}{b}$. Die Brechung n' ist veränderlich und die berechneten Werthe 'müssen daher noch um $+\frac{n'^3(a^2 - c^2)}{2} \cdot \sin^2 \frac{u' - u_i'}{2}$ corrigirt werden, damit sie $= \frac{1}{c}$ werden. Nach Anbringung dieser Correctionen, welche in der letzten Columnne enthalten sind, ergeben sich als Mittel aus diesen fünf Beobachtungen die Werthe:

$$\frac{1}{b} = 1,47869; \quad \frac{1}{c} = 1,48687;$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler 0,00004.

§ 34. Wir können nun zur definitiven Feststellung der Elemente der doppelten Strahlenbrechung im Eisenvitriol schreiten. Aus den an den verschiedenen Prismenreihen gemachten Beobachtungen über die Differenz der Brechungen ergaben sich für das Element $a^2 - c^2$ folgende Werthe:

	$a^2 - c^2$	Gewichte.
Erste Prismenreihe	I. 0,008826	2,22
	II. 0,008866	1,25
	III. 0,008768	0,56
Zweite Prismenreihe	I. 0,008815	2,20
	II. 0,008805	1,19
	III. 0,008863	0,35

	$a^2 - c^2$.	Gewichte.
Dritte Prismenreihe	I. 0,008765	0,7
	II. 0,008758	0,61
	V 0,008814	0,44
	VI. 0,008888	0,47

Die an den Prismen III. und IV. der dritten Prismenreihe beobachteten Brechungsdifferenzen können bei der Bestimmung dieses Elements nicht in Betracht kommen, weil sie zu klein sind. Die Gewichte der einzelnen Werthe von $a^2 - c^2$ sind so bestimmt worden, daß ihr Verhältniß zusammengesetzt ist aus dem Verhältniß der Quadrate der beobachteten Brechungsdifferenzen, aus denen die Werthe von $a^2 - c^2$ abgeleitet sind, und aus den umgekehrten Verhältnissen der Quadrate der wahrscheinlichen Fehler dieser beobachteten Differenzen. Wir erhalten hieraus für $a^2 - c^2$ den definitiven Werth 0,008818 mit dem wahrscheinlichen Fehler 0,000008.

Die Differenz zwischen den im vorigen § für $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ gefundenen Werthen ist 0,00818; nun aber haben wir für $\frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ zu Folge der § 29 aufgestellten Gleichungen die Formel $\frac{a^2 - c^2}{bc(b+c)} \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}$, wo ω der stumpfe Winkel der optischen Axen ist; daraus ergibt sich, mit Zuziehung des so eben für $a^2 - c^2$ gefundenen Werthes, $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = 0,00784$, wovon jene Differenz um 0,00034 abweicht. Dieser Fehler in der Differenz der im vorigen § ermittelten Werthe für $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ läßt sich wohl daraus erklären, daß ich die Mitte des Grüns in den durch die beiden Brechungen erzeugten Spectris, bei einer vielleicht etwas verschiedenen Farbenvertheilung in denselben, verschieden geschätzt habe. Es ist gewiß am natürlichsten, jede der beiden Brechungen um die Hälfte dieser Abweichung also um 0,00017 zu corrigiren, woraus sich ergibt $\frac{1}{b} = 1,47886$ und $\frac{1}{c} = 1,48670$. — Wir wollen nun die Endresultate unserer Beobachtungen zusammenstellen.

Elemente der doppelten Strahlenbrechung des Eisenvitriols, für den
mittelsten grünen Strahl.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{a} = 1,47242 \\ \frac{1}{b} = 1,47886 \\ \frac{1}{c} = 1,48670 \end{array} \right\} \text{ mit dem wahrscheinlichen Fehler } 0,00011.$$

$$a^2 - c^2 = 0,008818, \text{ mit dem wahrscheinlichen Fehler } 0,000008.$$

Winkel zwischen der Elasticitätsaxe c und der Krystallfläche b oder dem Blätter-
durchgange $= -14^\circ 16',5$, mit dem wahrscheinlichen Fehler $0',4$.

Der spitze Winkel zwischen den optischen Axen der Wellenebenen, der von
der Elasticitätsaxe c halbirt wird, $= 84^\circ 49',7$, mit dem wahrscheinl. Fehler $0',7$.

Es läßt sich aus diesem Winkel auch der Werth des Winkels zwischen den opti-
schen Axen der Strahlen (siehe § 16) ableiten, indem die Tangente der Hälfte die-
ses Winkels sich zur Tangente der Hälfte jenes verhält wie $c:a$, woraus sich für
diesen Winkel der Werth $84^\circ 16',7$ ergibt.

Diese Winkelangaben sind die aus der Beobachtung der Farbenringe abgeleiteten,
und die größte Aenderung, welche die Beobachtungen der Brechungsdifferenzen in
ihnen verlangen, ist $13'$ im Winkel der optischen Axen.

§ 34. In den Resultaten unserer bisherigen Untersuchungen über die optischen
Erscheinungen am Eisenvitriol scheint sich keine Abweichung von den Fresnel'schen
Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung zu zeigen, wenigstens nicht mit Ent-
schiedenheit. Dieses liefs sich allerdings erwarten; denn bei dem geringen Einfluß,
welchen eine mögliche Verschiedenheit in dem optischen Verhalten des Krystall-
systems, zu dem das untersuchte Mineral gehört, auf die Brechungen und ihre Diffe-
renz äußern kann, und bei der Schwierigkeit, diese Gröfsen mit der erforderlichen
Genauigkeit und unabhängig von den zufälligen Unregelmäßigkeiten einzelner Kry-
stallindividuen durch Beobachtung zu bestimmen, konnten die vielleicht vorhandenen
gesetzmäßigen Abweichungen leicht unentdeckt bleiben. Um daher die Geltung der
bisher angenommenen Gesetze der doppelten Strahlenbrechung für dieses Krystall-
system einer noch strengeren Prüfung zu unterwerfen, richtete ich meine nächste Un-
tersuchung auf die Lage der Polarisations Ebenen, in denen sich eine jede Ab-

weichung von diesen Gesetzen jedenfalls bei weitem entschiedener kund geben muß, als in der Differenz der Brechungen. Zu Folge der Fresnel'schen Gesetze müssen die beiden Strahlen, welche der Elasticitätsaxe b parallel durch den Krystall gehen, in den Richtungen der beiden andern Elasticitätsaxen a und c , das heisst der beiden Mittellinien der optischen Axen, polarisirt sein. Ich ging also darauf aus, die Lage der Polarisations Ebenen für diese Strahlen mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen. Zu diesem Zwecke schliiff ich aus gut gebildeten Krystallen zwei Platten, deren Flächen auf der Axe b senkrecht oder der Krystallfläche u parallel waren, und beruhigte mich nicht eher, als bis die Lage derselben in keiner Richtung um mehr als $2'$ fehlerhaft war. Auf den Seiten waren diese Platten von den schiefen Endflächen b und v begrenzt, welche ich möglichst conservirt hatte, damit sie mir zur Bestimmung der Lage der Polarisations Ebene gegen dieselben dienen konnten. Jede dieser Platten wurde nun mit einer ihrer angeschliffenen Flächen auf ein besonderes Stück Spiegelglas mit parallelen Ebenen durch Terpentinfirnis befestigt, so dafs die andere geschliffene Fläche den Ebenen des Glases vollkommen parallel war, was sich leicht durch Spiegelung prüfen liefs. Nachdem sich der Firnis verhärtet, wurde nun auch die andere Fläche jeder Platte mit Spiegelglas belegt, um dem Licht einen möglichst vollkommenen Durchgang zu verschaffen. An den Spiegelgläsern, auf welche ich die Krystallplatten zuerst gekittet, war eine Kante senkrecht gegen die spiegelnden Ebenen abgeschliffen und polirt, so dafs ich die Winkel zwischen dieser und den schiefen Endflächen der Krystallplatte messen konnte. Hieraus erwuchs mir der Vortheil, dafs ich die Lage der Polarisations Ebenen blofs gegen die geschliffene Kante der Glasplatte zu bestimmen brauchte, welche bei weitem vollkommener spiegelte, als die schmalen Krystallflächen, während ich die Winkel zwischen diesen und der Glaskante mit grösserer Sorgfalt messen konnte. Diese geschliffene Kante des Spiegelglases werde ich K nennen. Ich belegte hierauf noch die eine Seite beider Spiegelgläser, und liefs nur einen kleinen Kreis von 1 Linie Durchmesser offen, innerhalb dessen die Lichtstrahlen freien Durchgang durch die Krystallplatte hatten. — Ausser diesen beiden Platten von Eisenvitriol hatte ich mir noch ein Kalkspathprisma mit einem Winkel von ungefähr 40° bereitet, dessen brechende Kante auf der optischen Axe des Kalkspaths senkrecht stand, und dieses war mit einem Glasprisma verbunden, welches den ungewöhnlich gebrochenen Strahl fast vollkommen achromatisirte. An das Kalkspath-

prisma hatte ich auſſer den beiden brechenden Flächen eine dritte angeſchliffen, welche der brechenden Kante genau parallel war, und nahezu ſenkrecht auf der einen brechenden Fläche, in welcher die optiſche Axe lag. Ich werde dieſe dritte Fläche *F* nennen. — Die Krystallplatte nun, an welcher die Beobachtung unternommen werden ſollte, wurde an das Goniometer gebracht, aus dem ich vorher die innere Axe herausgezogen hatte, und ſo daran befeſtigt, daſs die durch die hohle Axe des Goniometers gehenden Strahlen die Platte ſenkrecht durchſchnitten. Das Licht, welches ich durch die Goniometeraxe hindurch einfallen lieſs, war genau in der Vertikalebene polarisirt, und nachdem es die Krystallplatte durchdrungen, fiel es auf das vor dem Auge des Beobachters aufgeſtellte Kalkſpathprisma, deſſen optiſche Axe ebenfalls genau in der Vertikalebene lag. Die Krystallplatte wurde nun durch Drehung des Goniometerkreiſes ſo geſtellt, daſs das im Kalkſpathprisma ungewöhnlich gebrochene Licht verſchwand oder wenigſtens im Minimum der Helligkeit erſchien, und bei dieſer Stellung, wo offenbar die Polariſationsebene des durch die Krystallplatte hindurchgegangenen Lichts auch vertikal ſein muſſte, wurde eine Ablesung am Kreiſe gemacht. Hierauf wurde die Kante *K* des Spiegelglases horizontal geſtellt und eine zweite Ablesung gemacht; die Differenz dieſer beiden Ablesungen weniger 90° iſt der Winkel, welchen die Polariſationsebene des durch die Platte hindurchgehenden Lichts mit der Kante *K* bildet.

§ 35. Auf welche Weiſe ich nun dieſe fünf Bedingungen erfüllt habe, 1) daſs die Polariſationsebene des einfallenden Lichts genau vertikal war, 2) daſs die Strahlen ſenkrecht durch die Platte hindurch gingen, 3) daſs die optiſche Axe des Kalkſpathprismas in der Vertikalebene lag und ſeine brechende Kante ſenkrecht gegen die einfallenden Strahlen, 4) daſs die Platte in die Stellung kam, bei welcher der im Kalkſpath ungewöhnlich gebrochene Strahl das Minimum der Helligkeit erreichte, und 5) daſs die Kante *K* genau horizontal geſtellt wurde, — will ich jetzt ausführlicher beſchreiben.

Erſtens. Bevor ich die Krystallplatte an das Goniometer brachte, befeſtigte ich an dem einen Ende ſeiner Axe das Objectivglas eines kleinen Sextantenfernrohrs, und auf das andere Ende ſchob ich das Ocular deſſelben, ſo daſs die hohle Goniometeraxe in ein Fernrohr verwandelt war. Die Mitte des Objectivs lag genau in der Goniometeraxe, und durch eine geringe Seitenverſchiebung des Oculars war es alſo

möglich, die Axe des Fernrohrs vollkommen mit der Axe des Goniometers zusammenfallen zu lassen, indem für diesen Fall das Fernrohr bei Umdrehung des Goniometerkreises immer auf denselben Punkt gerichtet bleiben mußte. In einer Entfernung von 7 bis 8 Fufs von dem Goniometer wurde nun ein Faden an der Decke des Zimmers lothrecht aufgehängt, so dafs er genau durch die Mitte des Fadenkreuzes im Fernrohr zu gehen schien. Hierauf stellte ich, etwa 2 Fufs näher zum Goniometer, den Polarisationspiegel auf und gab ihm eine solche Lage, dafs ich durch das Fernrohr hindurch den obersten Theil des Fadens in demselben unter dem Polarisationswinkel reflectirt sah, und auch dieser genau auf der Mitte des Fadenkreuzes erschien. Nun wurde noch eine Argantische Lampe zwischen dem lothrechten Faden und dem Polarisationspiegel einige Fufs über dem letzteren aufgestellt, so dafs das vom Spiegel reflectirte Bild ihrer Flamme ins Fernrohr geworfen wurde. Ein kleiner an der Lampe angebrachter und mit einer runden Oeffnung versehener Schirm liefs jedoch nicht die ganze Flamme sehen, sondern nur eine kleine runde gleichförmig erleuchtete Scheibe, welche einen scheinbaren Durchmesser von ungefähr 8' hatte, und den Mittelpunkt des reflectirten Bildes dieser Scheibe brachte ich durch die Stellung der Lampe ebenfalls auf die Mitte des Fadenkreuzes. Jetzt ging der mittelste reflectirte Strahl der Goniometeraxe parallel durch dieselbe hindurch, und seine Polarisationsebene war genau vertikal.

Zweitens. Nachdem ich Objectiv und Ocular von der Goniometeraxe entfernt, wurde die Krystallplatte an derselben befestigt und zwar vermittelst einer Vorrichtung, durch welche sie um zwei unter einander und auf der Goniometeraxe senkrechte Axen gedreht werden konnte. Es brauchte jetzt nur das Spiegelglas, auf welches die Platte gekittet war, gegen die Goniometeraxe senkrecht gestellt zu werden. Dieses wurde dadurch erreicht, dafs ich seitwärts in einiger Entfernung vom Goniometer zwei brennende Kerzen neben einander aufstellte, so dafs die Flamme der einen, im Spiegelglase reflectirt, mit der direct gesehenen Flamme der andern zusammenfiel, und nun die Krystallplatte so lange vermittelst der beiden Axendrehungen richtete, bis die Coincidenz der beiden Flammen während der Umdrehung des Goniometerkreises bleibend war. In diesem Fall mußte die Krystallplatte, welche überdies so gestellt war, dafs der Mittelpunkt des kleinen unbelegten Kreises derselben in der Goniometeraxe lag, gegen diese Axe und somit gegen die einfallenden Strahlen senkrecht gerichtet sein.

Drittens. Das Kalkspathprisma war an der aus dem Goniometer herausgenommenen innern Axe desselben, welcher ich ein besonderes, auf drei Schrauben ruhendes Gestell gegeben hatte, befestigt, und wurde einige Zoll vor der Krystallplatte aufgestellt. Die Axe brachte ich mit Hülfe eines Oelspiegels in die horizontale Lage, und stellte zugleich die vordere brechende Fläche des Kalkspathprismas, so wie die Fläche F derselben parallel, und letztere genau horizontal, auf dieselbe Weise wie bei Krystallwinkelmessungen. An dem andern Ende der Axe war ein Stück Spiegelglas befestigt, dessen spiegelnde Fläche auf ihr senkrecht stand. Die Entfernung dieser Fläche von der Mitte des Kalkspaths hatte ich gemessen, und in der doppelten Entfernung von dem an der Decke hängenden Faden seitwärts von demselben eine Marke angebracht. Liefs ich nun durch Verschiebung des Gestells der Axe das von dem Spiegelglase reflectirte Bild der Marke auf den Faden fallen, so hatte die Axe und somit auch die brechende Kante des Prismas eine gegen die Strahlen senkrechte Richtung. — Bei dieser Stellung des Kalkspathprismas fiel die auf der vorderen brechenden Fläche desselben und auf der Fläche F senkrecht stehende Ebene mit der vertikalen Polarisationsebene des Lichts zusammen, und wenn also die optische Axe des Kalkspaths in jener Ebene lag, so lag sie nun auch in dieser. Da ich jedoch ersteres nicht mit mathematischer Genauigkeit voraussetzen konnte, so verband ich die Beobachtungen in dieser Stellung des Kalkspathprismas mit denen in der umgekehrten Stellung desselben, wo es um 180° um eine vertikale Axe gedreht und wieder auf dieselbe Weise eingestellt war. Die Abweichung der optischen Axe des Kalkspaths von der vertikalen Ebene lag bei diesen beiden Stellungen offenbar auf entgegengesetzten Seiten derselben, und fiel also im Mittel aus beiden Bestimmungen heraus.

Viertens. Es kam jetzt nur darauf an, die Krystallplatte durch Drehung des Goniometerkreises so zu stellen, dafs von den beiden Bildern der runden leuchtenden Scheibe, welche man durch den Kalkspath und die Krystallplatte hindurch von dem Polarisationsspiegel reflectirt sah, das eine vom Kalkspath ungewöhnlich gebrochene Bild im Minimum der Helligkeit erschien. Obgleich jedoch das Zimmer ganz verfinstert war, indem die Lampe in einem verschlossenen Kasten brannte und nur durch eine kleine Oeffnung ihr Licht auf den Polarisationsspiegel fallen liefs, so hätte ich doch die Stellung der Platte, bei welcher das Minimum der Helligkeit eintrat, nur mit geringer Genauigkeit beobachten können, da eine ziemlich bedeutende Drehung der

Platte in der Nähe des Minimums, wie sich leicht einsehen läßt, eine fast unmerkliche Aenderung in der Helligkeit hervorbrachte. Ich hielt es daher für zweckmäßiger, solche Stellungen auf der einen und der anderen Seite des Minimums zu beobachten, bei welchen das Bild in gleicher Helligkeit erschien, und das Mittel zwischen ihnen zu nehmen. Um dieses ausführen zu können, befestigte ich an dem Goniometerkreise, nachdem er schon ungefähr in die Stellung des Minimums gebracht war, einen Arm von etwa 15 Zoll Länge, in Form eines Zeigers, der sich mit seiner Spitze längs einem kleinen, auf Papier getheilten Kreisbogen bewegte, und zugleich zwei feine, auf runden Stiften ruhende Holzstäbchen nach der einen und der anderen Seite verschob. Ich brachte nun die Platte in eine von der Stellung des Minimums wenig abweichende Lage, doch so, daß die Helligkeit des Bildes schon merklich zugenommen hatte, und hierauf drehte ich sie sogleich, ohne das Auge von dem Bilde abzuwenden, durch das Minimum hindurch auf die andere Seite desselben, bis das Bild in derselben Helligkeit erschien, als bei der früheren Lage. An der Stellung der beiden Holzstäbchen konnte ich nun die Verschiebung nach der einen und der anderen Seite hin erkennen, und nachdem ich den Zeiger in die Mitte derselben gebracht hatte, die sich an der Theilung genau bestimmen liefs, las ich den eingetheilten Kreis ab. Auf diese Weise erreichte ich in den einzelnen Einstellungen doch eine solche Genauigkeit, daß die größten Abweichungen zwischen denselben nur äußerst selten 15' überstiegen, und der mittlere Fehler einer einzelnen Einstellung nur 5' betrug.

Fünftens. Um nun die Kante K des Spiegelglases genau in die horizontale Lage zu bringen, hatte ich ein flaches Uhrglas bis zum Rande mit Oel gefüllt und es mit einem Gestelle versehen, auf welchem es höher und tiefer gestellt und zugleich um zwei horizontale Axen gedreht werden konnte. Dieses schob ich so nahe als möglich an die nahezu horizontal gestellte Kante K , brachte den oberen Rand des Uhrglases und somit die spiegelnde Oelfläche in gleiches Niveau mit dieser Kante, und richtete es zugleich so, daß die Oelfläche, in dem Punkte wenigstens, wo sie der Kante K am nächsten war, genau an den Rand des Uhrglases grenzte, und also durch die Adhäsion an demselben weder concav noch convex gekrümmt wurde. Nun brachte ich in einiger Entfernung seitwärts eine Marke an, und richtete ein Fernrohr auf den Punkt, wo die Kante K und der Oelspiegel sich am nächsten waren, so daß ich in

§ 36. Die Winkel zwischen den Krystallflächen b und v und der Kante K mußten zuerst an beiden Platten gemessen werden. Ich wiederholte jedoch diese Messungen nach Beendigung der Polarisationsbeobachtungen, um mich zu überzeugen, daß keine Verrückung der Platten gegen die Spiegelgläser, auf welche sie gekittet waren, Statt gefunden hatte, was sich auch bestätigte. Folgende Angaben sind die Mittel aus diesen Messungen:

	Platte I.	Platte II.
$\angle bK$	100° 15'	100° 15'
$\angle vK$	100° 15'	100° 15'
$\angle bKv$	100° 15'	100° 15'

Da sich vermuthen liefs, dafs die Temperatur des Krystalls Einflufs auf die Lage der Polarisationssebene des durch ihn hindurchgehenden Strahls haben würde, so versuchte ich zuvor, an einer der Platten Beobachtungen über die Aenderung derselben bei verschiedenen Temperaturen anzustellen, welche Beobachtungen ich hier aufführen will. Leider stand mir damals noch keine Vorrichtung zu Gebote, den Krystall während der Beobachtung in erhitztes Oel tauchen zu können, und ich mufste mich daher mit der Aenderung der Temperatur der Luft begnügen, welche ich von $+4^{\circ}$ bis $+19^{\circ}$ R. übergehen liefs; innerhalb dieses Interwalls machte ich mehrere Bestimmungen, ohne die Stellung des Kalkspathprismas oder des Polarisationspiegels zu ändern. Jede Bestimmung ist das Mittel aus zwölf Einstellungen.

Winkel zwischen der Kante K und der Polarisationsebene des nach der Axe c polarisirten Strahls an der Patte I, bei verschiedenen Temperaturen beobachtet.

Winkel.	Temperatur.
76° 8',6	+ 3°,9 R.
20',5	+ 8°,0 „
20',0	+ 11°,1 „
25',6	+ 17°,5 „
26',6	+ 18°,6 „

Setzen wir nun diesen Winkel (der offenbar nur um 62° 5',4 vermindert zu werden braucht, um den Winkel zwischen der Polarisationsebene und der Krystallfläche b zu geben) = 76° 20',0 + x Minuten bei einer Temperatur von + 10°, und die Zunahme desselben = 1' + y Minuten für 1° Temperaturzunahme, so haben wir die Gleichungen:

$$x - 6,1y = -5,3$$

$$x - 2,0y = +2,5$$

$$x + 1,1y = -1,1$$

$$x + 7,5y = -1,9$$

$$x + 8,6y = -2,0$$

die nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt zu den Endgleichungen führen:

$$5x + 9,1y = -7,8$$

$$9,1x + 172,7y = -5,4$$

aus denen sich ergibt $x = -1,7$ und $y = 0,056$.

Demnach ist die Zunahme des Winkels zwischen der Kante K und der Polarisations-ebene, also auch des Winkels zwischen der Krystallfläche b und dieser Ebene = 1',06 für jeden Grad R., mit dem wahrscheinlichen Fehler 0',17. Eine grössere Genauigkeit liefs sich in dieser Bestimmung auch nicht erwarten, da ich den Krystall nur einem so geringen Temperaturwechsel hatte unterwerfen können.

Bei der Beobachtung des Winkels zwischen der Polarisationsebene und der Krystallfläche b habe ich an jeder Platte vier von einander unabhängige Bestimmungen gemacht: zwei in der ersten Lage des Kalkspathprismas, zwei in der umgekehrten Lage desselben, wo es um 180° um eine vertikale Axe gedreht war. Bei jeder dieser Bestimmungen ist die richtige Stellung des ganzen Beobachtungsapparats, sowohl des

Polarisationsspiegels als der Krystallplatte und des Kalkspathprismas, von Neuem geprüft worden, und die Bestimmung ist das Mittel aus 12 bis 16 Beobachtungen, die zur Hälfte an dem nach der Axe c , zur Hälfte an dem nach der Axe a polarisirten Strahle gemacht wurden. Um zugleich prüfen zu können, wie genau sich die Rechtwinkligkeit der Polarisationsebenen dieser beiden Strahlen bewährt, habe ich die Mittel aus diesen und jenen Beobachtungen besonders aufgeführt. Die Reduction der gemachten Bestimmungen auf eine gleiche Temperatur habe ich unterlassen, da der Einfluß derselben im Mittel verschwindet.

Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen der der Axe b parallel gehenden Strahlen und der Krystallfläche b .

	Platte I.		Platte II.	
Bei der ersten Stellung des Kalkspathprismas	14° 12',6	10°,8 R.	14° 13',7	10°,8 R.
	104 12',7		104 15,8	
	14° 18',9	13°,3 R.	14° 14',6	12°,8 R.
	104 17,6		104 12,3	
Bei der zweiten Stellung des Kalkspathprismas	14° 22',3	13°,0 R.	14° 16',6	11°,0 R.
	104 26,1		104 16,8	
	14° 13',6	7°,5 R.	14° 17',4	13°,1 R.
	104 15,0		104 14,2	
Mittel	14° 16',8	11°,2 R.	14° 15',6	11°,9 R.
	104 17,8		104 14,8	

Nehmen wir noch das Mittel aus beiden Platten, so erhalten wir die Werthe 14° 16',2 und 104° 16',3, entsprechend der Temperatur + 11°,5 R. Es bewährt sich somit an unsern Beobachtungen auf das Vollkommenste die Rechtwinkligkeit der beiden Polarisationsebenen derjenigen Strahlen, welche der Axe b parallel gehen, indem der Unterschied jener beiden Winkel genau = 90°.

Vergleichen wir nun das so eben erhaltene Resultat mit dem im § 16 für den Winkel zwischen der Mittellinie der optischen Axen und der Krystallfläche b gefundenen Werthe 14° 16',5, welcher fast derselben Temperatur entspricht (denn die dort angegebene Temperatur + 13° ist nur ungefähr richtig), so sehen wir, daß die beiden Polarisationsebenen der senkrecht gegen die Ebene der optischen Axen durch den Krystall hindurchgehenden Strahlen genau mit den Mittellinien der optischen Axen zusammenfallen. Es stimmen also

auch von dieser Seite die optischen Erscheinungen am Eisenvitriol vollkommen mit den Fresnel'schen Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung überein.

§ 37. Es liegt mir noch ob, meinem im § 4 gegebenen Versprechen gemäß, ein rechtwinkliges krystallographisches Axensystem im Eisenvitriol nachzuweisen, welches mit dem optischen nahezu zusammenfällt. Die zu diesem Systeme gehörige Axe c bildet mit der Krystallfläche b den Winkel $15^\circ 13',6$, und weicht also $57'$ von der Mittellinie der optischen Axen ab. Die Krystallflächen haben, auf dieses Axensystem bezogen, folgende Zeichen:

$$\begin{aligned} v &= (a : \infty : c) & P &= (a : 5b : c) \\ b &= \left(-\frac{a}{2} : \infty : c\right) & o &= \left(-\frac{a}{2} : \frac{3b}{2} : c\right) \\ t &= \left(-a : \infty : \frac{c}{8}\right) & k &= \left(-a : \frac{b}{2} : \frac{c}{8}\right) \\ g &= \left(\frac{a}{11} : \infty : \frac{c}{2}\right) & f &= \left(\frac{a}{4} : \frac{b}{2} : \frac{c}{13}\right) \\ & & u &= (\infty : b : \infty), \end{aligned}$$

und das Verhältniß der Axen ist:

$$a : 5b : c = 0,54436 : 0,58424 : 1.$$

Es ergeben sich aus diesem Axenverhältnisse, verbunden mit jenen Flächenzeichen, folgende Winkel zwischen den Krystallflächen:

$$\begin{aligned} bg &= 20^\circ 52',8 & \frac{oo}{2} &= 56^\circ 16',9 & vo &= 60^\circ 22',6 \\ bv &= 43 \quad 47,3 & \frac{ff}{2} &= 48 \quad 53,8 & tf &= 60 \quad 57,7 \\ vg &= 22 \quad 54,6 & \frac{PP}{2} &= 39 \quad 17,7 & of &= 44 \quad 13,6 \\ vt &= 74 \quad 22,2 & \frac{kk}{2} &= 64 \quad 22,8 & (fk) &= 61 \quad 59,7 \end{aligned}$$

Vergleichen wir dieselben mit den § 11 aufgeführten, aus den Beobachtungen entlehnten Werthen dieser Winkel, so finden wir eine so außerordentliche Uebereinstimmung dieser Angaben mit jenen, daß keine Abweichung über $0',2$ zwischen ihnen vorkommt; eine Genauigkeit, an die wir bei krystallographischen Bestimmungen so wenig gewöhnt sind, daß wir sie für zufällig anzusehen geneigt sein könnten. Berücksichtigen wir jedoch, daß jene beobachteten Werthe der Winkel aus einer großen

Reihe an verschiedenen Krystallen angestellter Beobachtungen abgeleitet, und also nicht mehr mit den an einzelnen Individuen vorkommenden Unregelmäßigkeiten behaftet sind, so wird uns jene Uebereinstimmung nicht mehr befremden, sondern nur dazu bestimmen, die Naturgemäßheit der Beziehung des Eisenvitriols auf jenes rechtwinklige Axensystem anzunehmen. Ich habe es nicht für nöthig erachtet, die übrigen gemessenen Winkel alle zu berechnen, weil es sich von selbst versteht, daß auch bei ihnen keine bedeutenderen Abweichungen vorkommen können, zumal da ich gerade diejenigen Winkel angeführt habe, auf welche eine Aenderung in dem Verhältniß unserer Axen den größten Einfluß hat. — Die in den Flächenzeichen vorkommenden Zahlen scheinen mir auch nicht so groß zu sein, daß man sie als bloße Annäherungen an irrationale Verhältnisse ansehen könnte, denn selbst an Krystallen des regelmäßigen Systems hat man Flächen gefunden, deren Zeichen Verhältnißzahlen bis 15 und darüber enthalten (siehe Naumann's Lehrbuch der Krystallographic), wodurch der Gebrauch solcher Verhältnißzahlen unbedingt gerechtfertigt wird. — Unsere krystallographische Axe c weicht von der Mittellinie der optischen Axen oder der Elasticitätsaxe c um $57'$ ab, welche Abweichung neben der Genauigkeit, mit welcher alles Uebrige zusammenstimmt, auffallend erscheinen möchte. Ich muß jedoch bemerken, daß ein vollkommenes Zusammenfallen des optischen und des krystallographischen Axensystems gar nicht zu erwarten ist, da ersteres seine Lage mit der Temperatur ändert, letzteres jedoch, wenn es rechtwinklig bleiben soll, beim Wechsel der Temperatur nur eine Aenderung in dem Verhältniß seiner Axen aber durchaus nicht in der Lage derselben erfahren darf, oder, was dasselbe sagen will, mit dem termischen Axensysteme zusammenfallen muß. Die Identität des termischen und krystallographischen Axensystems ist es also, welche wir allein voraussetzen können, und welche auch von Neumann schon am Gyps nachgewiesen ist (siehe Poggendorfs Annalen 1833. Bd. 27.). Es würde daher von dem größten Interesse sein, am Eisenvitriol auch die Lage des termischen Axensystems zu ermitteln, doch ist diese Bestimmung mit großen Schwierigkeiten verknüpft, da jede bedeutendere Erhöhung der Temperatur die Verwitterung desselben sogleich nach sich zieht.

DRITTER THEIL.

Theoretische Untersuchungen über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung, insbesondere an den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems.

§ 38. Die Resultate unserer experimentellen Untersuchungen über die optischen Erscheinungen am Eisenvitriol stimmen so vollständig mit den von Fresnel auf theoretischem Wege aufgestellten Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung überein, daß wir die vorkommenden Abweichungen nur als Beobachtungsfehler oder zufällige Unregelmäßigkeiten ansehen können. Doch wäre es ohne Zweifel ein voreiliger Schluss, wenn wir aus diesem Ergebniss die Folgerung ziehen wollten, daß die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung für alle Krystalle des zwei- und eingliedrigen Systems, zu dem der Eisenvitriol gehört, mit jenen für die bisher untersuchten Systeme geltenden Gesetzen identisch seien. Denn von der einen Seite legten die Eigenthümlichkeiten der untersuchten Substanz den Beobachtungen so große Schwierigkeiten in den Weg, daß die Unsicherheit derselben dadurch nothwendig vermehrt werden mußte, und von der andern Seite konnten, bei der schwachen doppelt brechenden Kraft derselben, die Abweichungen in den Gesetzen der Brechung und Polarisation gerade an dieser Substanz in so geringem Grade vorhanden sein, daß sie sich den Beobachtungen entzogen. Auf dem Wege des Experiments könnte also über die Geltung oder Nichtgeltung jener Gesetze für das zwei- und eingliedrige System nur durch die Untersuchung solcher zu diesem Systeme gehörenden Substanzen entschieden werden, welche entweder der Untersuchung nur geringe Schwierigkeiten entgegensetzen, oder ihrer starken doppelt brechenden Kraft wegen die möglichen Abweichungen in den Gesetzen ihrer optischen Erscheinungen von den für allgemein geltenden in bedeuten-

derem Grade zu zeigen versprechen, wie letzteres z. B. bei dem chromsauren Blei der Fall ist. In der That sollen sich auch meine nächsten experimentellen Untersuchungen auf die optischen Eigenschaften dieses Minerals beziehen. — Jedenfalls aber wird es von Wichtigkeit sein, zuerst auf theoretischem Wege untersucht zu haben, in wie fern wir berechtigt sind, Verschiedenheiten zwischen den für das zwei- und zweigliedrige System und den für das zwei- und eingliedrige System geltenden Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung anzunehmen, und worin wir diese Verschiedenheiten zu suchen haben.

§ 39. Die Fresnel'sche Theorie, nach welcher dieselben Gesetze der Brechung und Polarisirung für alle mit zwei optischen Axen begabten Substanzen gelten, stützt sich auf gewisse zum Grunde gelegte Betrachtungen über die Wirkung der Elasticitätskräfte bei der Bewegung der Wellenebenen in krystallinischen Medien, die manches Hypothetische enthalten, das sich bei einer strengeren Behandlung als unbegründet erweist, wie dieses von Neumann in seiner schon angeführten Abhandlung über die doppelte Strahlenbrechung (siehe Anmerk. S. 3) dargethan worden ist. Neumann geht in dieser Abhandlung von den von Navier zuerst aufgestellten Fundamentalgleichungen für die kleinen Bewegungen in festen elastischen Körpern aus (Mém. de l'Acad. roy. An 1824), welche er in einer allgemeineren auch für krystallinische Körper geltenden Form darstellt, jedoch unter der Voraussetzung, daß diese sich durch drei auf einander rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilen lassen, wodurch die Substanzen des zwei- und eingliedrigen und des ein- und eingliedrigen Systems aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Er zeigt hierauf, wie bei der Untersuchung der vibrirenden Bewegungen des Aethers dieser als fester Körper behandelt und also der Anwendung jener Fundamentalgleichungen unterzogen werden kann, was von selbst einleuchtet, da bei den kleinen, die Elasticitätskräfte in Anspruch nehmenden Verrückungen der Moleküle, welche die Lichtvibrationen constituiren, von der flüssigen Natur des Körpers ganz abstrahirt werden kann, indem diese nur darauf beruht, daß bei Molekularverschiebungen von gewisser Ausdehnung immer neue und wieder neue Gleichgewichtslagen möglich sind, während die Erzitterungen, von denen hier die Rede ist, weit unter der Sphäre jener Verschiebungen bleiben, und eben in der Störung des Gleichgewichts ihren Grund haben. Ueberdies ist auch klar, daß der Aether, welcher einen krystallinischen Körper durchdringt, selbst als krystallinisches,

d. h. nach verschiedenen Richtungen verschieden elastisches Medium behandelt werden darf; denn wenn dieses auch nicht der Wahrheit gemäß wäre, so müßten wir doch gewiß annehmen, daß der krystallinische Körper an den Erzitterungen des Aethers Theil nimmt, und diese dadurch so erscheinen läßt, als wenn sie in einem krystallinischen Medium geschähen, und wir werden dann jene einfachere Betrachtungsweise an die Stelle dieser complicirteren setzen können, da beide in dem Resultate zusammenfallen. Aus dem von Fresnel zuerst erwiesenen und für die Theorie der doppelten Strahlenbrechung so wichtigen Satze: daß die Fläche, in welcher sich die von einem Punkte ausgehenden Vibrationen in irgend einem Medium verbreiten, und welche die Wellenfläche genannt wird, als die Enveloppe der gleichzeitig von diesem Punkte ausgehenden und nach allen Richtungen hin sich bewegenden, unbegrenzten Wellenebenen angesehen werden kann, — aus diesem Satze nun geht hervor, daß die Untersuchung der Gesetze der doppelten Strahlenbrechung sich auf die einfachere Betrachtung der Bewegung unbegrenzter Wellenebenen in krystallinischen Medien reducirt, und für diesen Fall ist es Neumann gelungen, die Integration jener allgemeinen Fundamentalgleichungen zu bewerkstelligen, und somit die Gesetze der Bewegung der Wellenebenen aus diesen abzuleiten. Seine Resultate stimmen durchaus (bis auf die Beziehung der Polarisationssebene einer Lichtwelle zu der Richtung ihrer Schwingungen) mit den Fresnel'schen Gesetzen, also auch mit der Erfahrung überein; doch bleibt, wenn dieses der Fall sein soll, die Natur der Function, welche die Abhängigkeit der Elasticitätskraft von der Richtung, in welcher sie hervorgerufen wird, ausspricht, nicht ganz gleichgültig, wie in der Fresnel'schen Theorie, sondern muß selbst in den gegen 3 auf einander senkrechte Ebenen symmetrisch gebildeten Krystallen des zwei- und zweigliedrigen Systems noch gewissen Bedingungen unterworfen werden. — Es wird hierdurch wahrscheinlich gemacht, daß die optischen Erscheinungen in den Gestalten des zwei- und eingliedrigen oder des ein- und eingliedrigen Systems, wo noch die Symmetrie gegen drei rechtwinklige Axen wegfällt, von den Fresnel'schen Gesetzen abweichen werden, und es ist zugleich die Möglichkeit gegeben, diese Abweichungen bis auf einen gewissen Grad vor auszubestimmen, und zwar nach einer strengen auf die Principien der Mechanik gegründeten Methode. — Ich werde daher zuerst die Navier'schen Fundamentalgleichungen in der allgemeinen Form ent-

wickeln, wo sie für jeden festen elastischen Körper gelten, unter der Voraussetzung jedoch, daß die Elasticitätskräfte sich nur wenig mit der Richtung in demselben ändern, wie dieses für alle krystallinischen Substanzen angenommen werden kann, und ich werde hierbei der Methode folgen, welche Poisson (Mém. de l'Acad. An. 1825) zur Entwicklung der Navier'schen Gleichungen angewendet hat. Hierauf werde ich, an die Neumann'sche Theorie der doppelten Strahlenbrechung mich anschließend, die Gesetze der Bewegung unbegrenzter Wellenebenen in den Krystallen des zwei- und zweigliedrigen und zwei- und eingliedrigen Systems aus jenen Fundamentalgleichungen abzuleiten versuchen, was für das letztere System nur in so weit geschehen kann, als es bei dem Mangel experimenteller Data möglich ist.

§ 40. Bezeichnen wir mit x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des betrachteten Körpers, so kann das in diesem Punkte befindliche Element desselben durch $dx dy dz$ ausgedrückt werden. Auf dieses Element werden nun durch die Einwirkung der übrigen Elemente Druckkräfte geübt, deren Summe jedoch, wenn das Element sich in seiner natürlichen Gleichgewichtslage befindet, $= 0$ sein wird. Nehmen wir aber an, daß das Element eine Verrückung aus dieser Lage erfahren hat, so werden die Druckkräfte in Wirksamkeit treten und das Element zu bewegen streben; es kommt darauf an, die Art und Weise ihrer Wirkung zu bestimmen. Betrachten wir zu diesem Zwecke die auf die sechs verschiedenen Seitenflächen desselben geübten Druckkräfte. Die Componenten der Druckkräfte, welche auf die drei durch den Punkt x, y, z gehenden Seitenflächen wirken, nach den drei Coordinatenaxen zerlegt, seien respective

für die Seitenfläche $dy dz$	$X, Y, Z,$
„ „ „ $dz dx$	$X', Y', Z',$
„ „ „ $dx dy$	$X'', Y'', Z'',$

und zwar sollen sich diese Druckkräfte auf die Einheit der Fläche beziehen, so daß also eine jede derselben noch mit der Seitenfläche, auf welche sie wirkt, multiplicirt werden muß. Da nun diese Kräfte von der Lage des Elements abhängen, und somit als Functionen der Coordinaten x, y, z behandelt werden müssen, so werden wir für die Componenten der Druckkräfte, welche auf die drei entgegengesetzten durch den Punkt $x + dx, y + dy, z + dz$ gehenden Seitenflächen des Elements wirken, folgende Ausdrücke haben:

$$\begin{array}{lll}
 \text{für die Seitenfläche } dy \, dz & \left(X + \frac{dX}{dx} dx \right), & \left(Y + \frac{dY}{dx} dx \right), & \left(Z + \frac{dZ}{dx} dx \right), \\
 \text{„ „ „ } dz \, dx & \left(X' + \frac{dX'}{dy} dy \right), & \left(Y' + \frac{dY'}{dy} dy \right), & \left(Z' + \frac{dZ'}{dy} dy \right), \\
 \text{„ „ „ } dx \, dy & \left(X'' + \frac{dX''}{dz} dz \right), & \left(Y'' + \frac{dY''}{dz} dz \right), & \left(Z'' + \frac{dZ''}{dz} dz \right).
 \end{array}$$

Diese Kräfte wirken aber in entgegengesetzter Richtung von jenen, und es müssen sich also beide in ihrer gemeinsamen Wirkung bis auf ihre Differenzen aufheben, welche letztere allein als bewegende Kräfte auftreten werden. Demnach ergeben sich für die Componenten der resultirenden Kraft, wenn wir die nach einer Axe gerichteten partiellen Druckkräfte vereinigen, und sie zugleich respective mit den Seitenflächen, auf welche sie wirken, multipliciren, folgende Werthe:

$$\begin{array}{ll}
 \text{nach der Axe } x & \frac{dX}{dx} dx \cdot dy \, dz + \frac{dX'}{dy} dy \cdot dz \, dx + \frac{dX''}{dz} dz \cdot dx \, dy, \\
 \text{„ „ „ } y & \frac{dY}{dx} dx \cdot dy \, dz + \frac{dY'}{dy} dy \cdot dz \, dx + \frac{dY''}{dz} dz \cdot dx \, dy, \\
 \text{„ „ „ } z & \frac{dZ}{dx} dx \cdot dy \, dz + \frac{dZ'}{dy} dy \cdot dz \, dx + \frac{dZ''}{dz} dz \cdot dx \, dy.
 \end{array}$$

Bezeichnen wir nunmehr die Verrückungen des Elements nach den Richtungen der drei Axen mit u, v, w , so sind diese Gröfsen, in so fern wir das Element als in Bewegung begriffen ansehen, Functionen der Zeit t , und es werden ihre zweiten Differentiale in Bezug auf die Zeit: $\frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{d^2 v}{dt^2}, \frac{d^2 w}{dt^2}$, mit der Masse des Elements multiplicirt, jenen Componenten der bewegendes Kraft gleich sein, vorausgesetzt, dafs das Element nur durch die Einwirkung der Molekularkräfte getrieben wird. Da nun die Masse des Elements $= dx \, dy \, dz$, wenn wir die Dichtigkeit des Körpers $= 1$ setzen, so erhalten wir auf diese Weise, nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors $dx \, dy \, dz$, für die Bewegung des Elements folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dX}{dx} + \frac{dX'}{dy} + \frac{dX''}{dz} \\
 \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{dY}{dx} + \frac{dY'}{dy} + \frac{dY''}{dz} \\
 \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{dZ}{dx} + \frac{dZ'}{dy} + \frac{dZ''}{dz}
 \end{array} \right\} \quad (1)$$

§ 41. Es kommt jetzt nur darauf an, die Druckkräfte X, Y, Z , etc. aus der Natur der Molekularkräfte abzuleiten. Die zwischen je zwei Elementen m und m' wirkende Kraft sei durch $mm'.F$ ausgedrückt, wo F eine Function ist von der Entfernung ρ der Elemente und von den Winkeln, welche die Richtung dieser Entfernung mit den drei Axen bildet, über deren Natur wir vorläufig weiter nichts bestimmen, als dafs sie für merkliche Werthe von ρ verschwindet und sich mit der Richtung nur wenig ändert, so dafs wir sie für den aus der Gleichgewichtslage gerückten Zustand der Elemente $= F + \frac{dF}{d\rho} d\rho$ setzen können, indem wir die Aenderung derselben in Bezug auf die Richtung als verschwindend gegen die auf die Entfernung sich beziehende Aenderung ansehen. Wir wollen nun zuerst blofs den Druck untersuchen, welchen das Element auf die Seitenfläche $dydz$ erleidet, woraus sich die auf die beiden andern Seitenflächen wirkenden Druckkräfte nach der Analogie leicht ableiten lassen. Denken wir uns die Ebene, in welcher die Fläche $dydz$ liegt, und die also der Hauptebene yz parallel ist, ins Unendliche verlängert, so wird der auf $dydz$ wirkende Druck offenbar hervorgehen aus der gemeinsamen Wirkung aller über dieser Ebene liegenden Elemente des Körpers (wobei wir uns nämlich die Axe x vertikal denken) auf die Reihe von Elementen, welche senkrecht unter der kleinen Fläche $dydz$ liegen. Wir wollen also die Coordinaten irgend eines Elements über dieser Ebene mit $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ bezeichnen, und die Coordinaten eines der unter $dydz$ liegenden Elemente mit $x - \lambda, y, z$, dann wird jenes Element durch $d\xi d\eta d\zeta$ und dieses durch $d\lambda dydz$ ausgedrückt werden können. Wir müssen uns jedoch im Allgemeinen alle Elemente in einem aus der Gleichgewichtslage gerückten Zustande denken, und wenn wir, wie früher, unter u, v, w die Verrückungen des im Punkte x, y, z befindlichen Elements nach den drei Axen verstehen, so werden diese Gröfsen nicht blofs Functionen der Zeit, sondern, da sie für jedes Element andere Werthe haben, auch Functionen der Coordinaten x, y, z sein. Demnach sind für das im Punkte $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ befindliche Element die Werthe der Verrückungen:

$$u + \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz}, \quad v + \xi \frac{dv}{dx} + \eta \frac{dv}{dy} + \zeta \frac{dv}{dz}, \quad w + \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \zeta \frac{dw}{dz},$$

und für das im Punkte $x - \lambda, y, z$ befindliche Element:

$$u - \lambda \frac{du}{dx}, \quad v - \lambda \frac{dv}{dx}, \quad w - \lambda \frac{dw}{dx},$$

wobei die höheren Potenzen von ξ , η , ζ und λ vernachlässigt sind, da nur die dem Punkte x, y, z sehr nahe liegenden Elemente in Betracht kommen. Bezeichnen wir also die Unterschiede der Verrückungen für die beiden zuletzt betrachteten Elemente mit δu , δv , δw , so haben wir:

$$\delta u = (\xi + \lambda) \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz},$$

$$\delta v = (\xi + \lambda) \frac{dv}{dx} + \eta \frac{dv}{dy} + \zeta \frac{dv}{dz}$$

$$\delta w = (\xi + \lambda) \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \zeta \frac{dw}{dz},$$

und bezeichnen wir zugleich die Entfernung dieser beiden Elemente, wie früher, mit ρ , und die Aenderung, welche dieselbe durch die Verrückung der Elemente erfährt, mit $\delta \rho$, so ist

$$\rho = \sqrt{(\xi + \lambda)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$\rho + \delta \rho = \sqrt{(\xi + \lambda + \delta u)^2 + (\eta + \delta v)^2 + (\zeta + \delta w)^2}$$

also

$$\delta \rho = \frac{\xi + \lambda}{\rho} \delta u + \frac{\eta}{\rho} \delta v + \frac{\zeta}{\rho} \delta w$$

mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von δu , δv , δw . Da nun die Gröfse $m m' F$, welche die zwischen den zwei Elementen wirkende Kraft ausdrückt, bei der aus dem Gleichgewichte gerückten Lage der Elemente, nach dem früher Bemerkten, in $F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho$ übergeht, und für die Cosinusse der Winkel, welche diese Kraft mit den drei Axen bildet, die Ausdrücke:

$$\frac{\xi + \lambda + \delta u}{\rho + \delta \rho}, \quad \frac{\eta + \delta v}{\rho + \delta \rho}, \quad \frac{\zeta + \delta w}{\rho + \delta \rho}$$

gelten, so erhalten wir, wenn wir für m und m' respective $d\xi d\eta d\zeta$ und $d\lambda dy dz$ setzen, für die Componenten der zwischen beiden Elementen wirkenden Kraft die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi + \lambda + \delta u}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta d\lambda dy dz, \\ & \frac{\eta + \delta v}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta d\lambda dy dz, \\ & \frac{\zeta + \delta w}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta d\lambda dy dz. \end{aligned}$$

Integriren wir dieselben, indem wir die Integration auf alle über der durch die Fläche $dydz$ gelegten Ebene sich befindenden Elemente des Körpers, und ebenso auf die ganze Reihe der unter $dydz$ liegenden Elemente ausdehnen, d.h. also in Bezug auf η und ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ und in Bezug auf ξ und λ von 0 bis $+\infty$ integriren, so erhalten wir die drei Componenten der auf die Fläche $dydz$ wirkenden Druckkraft, welche wir nur noch mit $dydz$ zu dividiren brauchen, um die auf die Einheit der Fläche sich beziehenden Druckkräfte X, Y, Z zu bekommen. Dafs wir die Grenzen der Integrale in Bezug auf ξ, η, ζ und λ bis ins Unendliche ausdehnen, ist uns darum verstattet, weil die zu integrirenden Functionen doch schon für merkliche Werthe dieser Gröfsen verschwindend sind.

§ 42. Gehen wir nun zuerst an die Integration in Bezug auf ξ und λ , so bemerken wir, dafs jene zu integrirenden Ausdrücke nirgends ξ oder λ abgesondert enthalten, sondern nur ihre Summe $\xi + \lambda$ (denn auch in ρ und $\delta\rho$ kommt nur diese vor), und dafs wir sie also unter der allgemeinen Form $f(\xi + \lambda) d\xi d\lambda$ darstellen können. Es läfst sich nun aber zeigen, dafs das Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi + \lambda) d\xi d\lambda$$

wenn die Function f die Eigenschaft hat, für unendliche Werthe des Arguments zu verschwinden, auf ein einfaches Integral zurückgeführt werden kann. Denken wir uns nämlich unter ξ, λ und μ Coordinaten, die sich auf ein rechtwinkliges Axensystem beziehen, und construiren die krumme Fläche, der die Gleichung $\mu = f(\xi + \lambda)$ angehört, so ist jenes Doppelintegral der Inhalt des aus der positiven Raumecke des Axensystems von jener krummen Fläche ausgeschnittenen Körpers. Bezeichnen wir aber mit $\xi' \lambda'$ und μ die Coordinaten in Bezug auf ein anderes rechtwinkliges Axensystem, dessen Axe μ dieselbe ist, wie bei dem früheren, während die andern beiden Axe um 45° gegen die früheren gedreht sind, so ist $\xi = \sqrt{\frac{1}{2}}(\xi' + \lambda')$ und $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}(\xi' - \lambda')$. Die Gleichung der krummen Fläche wird also $\mu = f(\xi' \sqrt{2})$, und für den Inhalt jenes Körpers erhalten wir somit

$$\iint f(\xi' \sqrt{2}) d\xi' d\lambda',$$

wo aber das Integral, wie man leicht übersieht, erst in Bezug auf λ zwischen den Grenzen $-\xi$ und $+\xi$, und dann in Bezug auf ξ' zwischen den Grenzen 0 und ∞ ge-

nommen werden mufs. Die erste Integration läfst sich ausführen, und das Integral verwandelt sich in

$$\int_0^\infty f(\xi' \sqrt{2}) 2\xi' d\xi',$$

und wenn wir für $\xi' \sqrt{2}$ wieder ξ setzen, wodurch sich die Grenzen des Integrals nicht ändern, so geht es über in

$$\int_0^\infty f\xi \cdot \xi d\xi,$$

welches einfache Integral also mit dem Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi + \lambda) d\xi d\lambda$$

gleichen Werth hat, vorausgesetzt, dafs $f(\infty) = 0$.

§ 43. Wenden wir diesen Satz auf die Integration jener Ausdrücke für die Componenten der zwischen zwei Elementen des Körpers wirkenden Kraft an, so haben wir in ihnen nur für $\xi + \lambda$ überall ξ zu substituiren, und den Factor $d\lambda$ durch den Factor ξ zu ersetzen, wobei zugleich die Integration nach λ wegfällt. Demnach erhalten wir für die Druckkräfte X , Y , Z folgende Integralformeln:

$$X = \iiint \frac{(\xi + \delta u)\xi}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta$$

$$Y = \iiint \frac{(\eta + \delta v)\xi}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta$$

$$Z = \iiint \frac{(\zeta + \delta w)\xi}{\rho + \delta \rho} \left(F + \frac{dF}{d\rho} \delta \rho \right) d\xi d\eta d\zeta$$

wo nach ξ von 0 bis ∞ , nach η und ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt werden mufs, und in diesen Formeln ist

$$\delta u = \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz}, \quad \delta v = \xi \frac{dv}{dx} + \eta \frac{dv}{dy} + \zeta \frac{dv}{dz}, \quad \delta w = \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \zeta \frac{dw}{dz},$$

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \delta \rho = \frac{\xi}{\rho} \delta u + \frac{\eta}{\rho} \delta v + \frac{\zeta}{\rho} \delta w.$$

Bezeichnen wir nun das Element einer Kugelfläche, die mit dem Radius 1 um den Punkt x, y, z beschrieben ist, durch $d\sigma$, so können wir das Körperelement $d\xi d\eta d\zeta$ auch durch $\rho^2 d\sigma d\rho$ ausdrücken, und setzen wir zugleich

$$\frac{\xi}{\rho} = \alpha, \quad \frac{\eta}{\rho} = \beta, \quad \frac{\zeta}{\rho} = \gamma,$$

wo also α, β, γ die Cosinusse der Winkel sind, welche ρ , d. h. die Richtung der Kraft F , mit den drei Axen bildet, und berücksichtigen, daß

$$\frac{F + \frac{dF}{d\rho} \delta\rho}{\rho + \delta\rho} = \frac{F}{\rho} + \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} \delta\rho$$

gesetzt werden kann, so werden jene Ausdrücke für die Druckkräfte in folgende umgeformt:

$$\begin{aligned} X &= \iint \left(\alpha^2 \rho^3 F + \alpha \delta u \rho^2 F + \alpha^2 \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} \right) d\rho d\sigma \\ Y &= \iint \left(\alpha \beta \rho^3 F + \alpha \delta v \rho^2 F + \alpha \beta \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} \right) d\rho d\sigma \\ Z &= \iint \left(\alpha \gamma \rho^3 F + \alpha \delta w \rho^2 F + \alpha \gamma \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} \right) d\rho d\sigma \end{aligned}$$

wo offenbar nach ρ von 0 bis ∞ integrirt, und die Integration nach $d\sigma$ über die Halbkugel, deren begrenzender Kreis der Hauptebene yz parallel ist, ausgedehnt werden muß. Setzen wir in diesen Ausdrücken $\delta u, \delta v, \delta w$ und $\delta \rho = 0$, so beziehen sie sich auf die ursprüngliche Gleichgewichtslage der Elemente, und da für diese die Druckkräfte $= 0$ sein müssen, so haben wir:

$$\iint \alpha^2 \rho^3 F d\rho d\sigma = 0, \quad \iint \alpha \beta \rho^3 F d\rho d\sigma = 0, \quad \iint \alpha \gamma \rho^3 F d\rho d\sigma = 0.$$

Hierdurch verschwinden auch die Glieder aus den Integralen, welche $\delta u, \delta v$ und δw enthalten; denn betrachten wir z. B. das Glied $\iint \alpha \delta u \rho^2 F d\rho d\sigma$, und setzen für δu seinen Werth $\rho \left(\alpha \frac{du}{dx} + \beta \frac{du}{dy} + \gamma \frac{du}{dz} \right)$, so löst es sich auf in

$$\iint \left(\alpha^2 \frac{du}{dx} + \alpha \beta \frac{du}{dy} + \alpha \gamma \frac{du}{dz} \right) \rho^2 F d\rho d\sigma,$$

wo jeder Theil für sich $= 0$ ist; dasselbe gilt von den übrigen. Demnach reduciren sich die Ausdrücke für die Druckkräfte auf diese:

$$X = \iint \alpha^2 \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} d\rho d\sigma, \quad Y = \iint \alpha \beta \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} d\rho d\sigma, \quad Z = \iint \alpha \gamma \delta \rho \rho^4 \frac{d\frac{F}{\rho}}{d\rho} d\rho d\sigma.$$

Ich will bemerken, daß wir für $\frac{\partial \rho}{\rho}$ die Formel haben

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \alpha^2 \frac{du}{dx} + \beta^2 \frac{dv}{dy} + \gamma^2 \frac{dw}{dz} + \beta \gamma \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + \gamma \alpha \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + \alpha \beta \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

diese GröÙe also nicht von ρ abhängt; somit ist in den Ausdrücken für X, Y, Z

der einzige von ρ abhängige Theil $\rho \cdot \frac{dF}{d\rho}$, und setzen wir

$$\int_0^\infty \rho \cdot \frac{dF}{d\rho} d\rho = F',$$

wo F' also nur noch eine Function von α, β, γ ist, so nehmen jene Ausdrücke die einfachere Form an

$$X = \int \alpha^2 \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, \quad Y = \int \alpha \beta \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, \quad Z = \int \gamma \alpha \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma.$$

Hätten wir dieselben Betrachtungen über die Componenten der auf die Flächen $dz dx$ und $dx dy$ wirkenden Druckkräfte angestellt, so würden wir, wie sich schon aus der Analogie schließsen läßt, folgende Ausdrücke für dieselben erhalten haben:

$$\begin{aligned} X' &= \int \alpha \beta \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, & Y' &= \int \beta^2 \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, & Z' &= \int \beta \gamma \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, \\ X'' &= \int \gamma \alpha \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, & Y'' &= \int \beta \gamma \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, & Z'' &= \int \gamma^2 \frac{\partial \rho}{\rho} F' d\sigma, \end{aligned}$$

in denen aber die Integrationen nach $d\sigma$ über diejenigen Halbkugeln ausgedehnt werden müssen, deren begrenzende Kreise den Hauptebenen zx und xy parallel sind. Da jedoch die Function F' ebenso wie die ursprüngliche Function F , ihrer Natur nach für entgegengesetzte Richtungen, für welche α, β, γ alle zugleich die Zeichen wechseln, denselben Werth hat, und auch in allen Gliedern der Integrale, wenn wir für $\frac{\partial \rho}{\rho}$ seinen Werth setzen, die Coefficienten von F' in α, β, γ von der vierten Dimension ρ^4 sind, so können wir offenbar jene Integrale auf die Weise bilden, daß wir sie über die ganze Kugeloberfläche ausdehnen, und dann die Hälften davon nehmen. Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \int \alpha^4 F' d\sigma &= A, & \int \beta^2 \gamma^2 F' d\sigma &= a, & \int \alpha^2 \beta \gamma F' d\sigma &= e, & \int \beta^3 \gamma F' d\sigma &= h, & \int \gamma^3 \beta F' d\sigma &= l, \\ \int \beta^4 F' d\sigma &= B, & \int \gamma^2 \alpha^2 F' d\sigma &= b, & \int \beta^2 \gamma \alpha F' d\sigma &= f, & \int \gamma^3 \alpha F' d\sigma &= i, & \int \alpha^3 \gamma F' d\sigma &= m, \\ \int \gamma^4 F' d\sigma &= C, & \int \alpha^2 \beta^2 F' d\sigma &= c, & \int \gamma^2 \alpha \beta F' d\sigma &= g, & \int \alpha^3 \beta F' d\sigma &= k, & \int \beta^3 \alpha F' d\sigma &= n, \end{aligned}$$

wo die Integrale auf die eben angegebene Weise zu nehmen sind, so erhalten wir für die Druckkräfte folgende Endformeln:

$$\begin{aligned}
 X &= A \frac{du}{dx} + c \frac{dv}{dy} + b \frac{d\omega}{dz} + e \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + m \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + k \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\
 Y' &= c \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dy} + a \frac{d\omega}{dz} + h \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + f \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + n \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\
 Z'' &= b \frac{du}{dx} + a \frac{dv}{dy} + C \frac{d\omega}{dz} + l \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + i \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + g \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\
 Y'' = Z' &= e \frac{du}{dx} + h \frac{dv}{dy} + l \frac{d\omega}{dz} + a \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + g \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + f \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\
 Z = X'' &= m \frac{du}{dx} + f \frac{dv}{dy} + i \frac{d\omega}{dz} + g \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + b \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + e \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\
 X' = Y &= k \frac{du}{dx} + n \frac{dv}{dy} + g \frac{d\omega}{dz} + f \left(\frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} \right) + e \left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + c \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)
 \end{aligned} \tag{II}$$

Setzen wir diese Werthe für $X, Y, Z, X',$ etc. in die Gleichungen (I), so haben wir in ihnen die Fundamentalgleichungen für die kleinen Bewegungen der Elemente irgend eines festen elastischen Körpers, in dem sich die zwischen zwei Elementen wirkende Kraft nur wenig mit der Richtung, in welcher sie hervorgerufen wird, ändert.

§ 44. Die Werthe der Constanten $A, B, C, a, b, c,$ etc. hängen von der Natur des Körpers ab, oder von der Natur der Function F , welche das Gesetz der zwischen zwei Elementen des Körpers wirkenden Kraft ausspricht. Es leuchtet von selbst ein, daß in den Integralen, durch welche diese Constanten gegeben sind, alle Glieder, welche ungerade Potenzen von α, β oder γ enthalten, bei der Integration über die ganze Kugeloberfläche verschwinden.

Haben wir nun erstens einen unkrystallinen Körper, so ist F nur eine Function von ρ und nicht abhängig von der Richtung oder von den Größen $\alpha, \beta, \gamma,$ und die GröÙe F' ist somit eine Constante. Dann wird $A = B = C = \frac{2\pi}{5} F'$ und $a = b = c = \frac{2\pi}{15} F'$, und die übrigen Constanten $e, f, g,$ etc. werden alle $= 0$. Durch die Substitution dieser Werthe gehen die Gleichungen (I) in die Navier'schen Fundamentalgleichungen über.

Betrachten wir zweitens einen krystallinen Körper, der sich durch drei auf einander senkrechte Ebenen symmetrisch theilen läßt, und wählen wir diese zu den Hauptebenen unseres Axensystems, so ist F nur eine Function von ρ und $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2,$

denn bei einer bloßen Aenderung des Vorzeichens von α , β oder γ bleibt F wegen der symmetrischen Structur des Körpers unverändert. Somit wird F' bloß eine Function von α^2 , β^2 und γ^2 sein, und es werden also alle Constanten verschwinden, außer A , B , C und a , b , c , deren Werthe unbestimmt bleiben, wenigstens für das zwei- und zweigliedrige System, denn für das viergliedrige und sechsgliedrige wird, wenn wir die Axe z zur Hauptaxe nehmen, wie sich leicht zeigen läßt, $A = B$ und $a = b$.

Haben wir drittens eine Substanz des zwei- und eingliedrigen Systems, und wir wählen die Hauptebene zx zur symmetrisch theilenden Ebene, so wird die Größe F'' , aus der ρ durch Integration verschwunden ist, nur eine Function von α^2 , β^2 , γ^2 und $\alpha\gamma$ sein, indem sie unverändert bleibt, wenn β sein Vorzeichen wechselt (denn auch im allgemeinsten Falle kann die Function F' außer von ρ nur von α^2 , β^2 , γ^2 , $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ abhängen, da durch gleichzeitige Aenderung der Vorzeichen von α , β und γ ihr Werth nicht geändert wird). Dann bleiben die Constanten A , B , C , a , b , c , f , i und m unbestimmt, die übrigen werden $= 0$, weil in den sie bestimmenden Integralen keine Glieder vorkommen, die nur gerade Potenzen von α , β und γ enthielten.

Da es dieser dritte Fall ist, mit dem wir uns vorzugsweise beschäftigen wollen, und er zugleich die beiden andern als specielle Fälle in sich schließt, so werde ich für denselben die Fundamentalgleichungen der Bewegung hier entwickelt aufführen. Es sind diese:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= A \frac{d^2u}{dx^2} + c \left(\frac{d^2u}{dy^2} + 2 \frac{d^2v}{dx dy} \right) + b \left(\frac{d^2u}{dz^2} + 2 \frac{d^2w}{dz dx} \right) + f \left(\frac{d^2w}{dy^2} + 2 \frac{d^2v}{dy dz} \right) + i \frac{d^2w}{dz^2} + m \left(\frac{d^2w}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dz dx} \right) \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= c \left(\frac{d^2v}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dy} \right) + B \frac{d^2v}{dy^2} + a \left(\frac{d^2v}{dz^2} + 2 \frac{d^2w}{dy dz} \right) + 2f \left(\frac{d^2u}{dy dz} + \frac{d^2v}{dz dx} + \frac{d^2w}{dx dy} \right) \\ \frac{d^2w}{dt^2} &= b \left(\frac{d^2w}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dz dx} \right) + a \left(\frac{d^2w}{dy^2} + 2 \frac{d^2v}{dy dz} \right) + C \frac{d^2w}{dz^2} + f \left(\frac{d^2u}{dy^2} + 2 \frac{d^2v}{dx dy} \right) + m \frac{d^2u}{dx^2} + i \left(\frac{d^2u}{dz^2} + 2 \frac{d^2w}{dz dx} \right) \end{aligned} \quad (III)$$

Setzen wir in ihnen f , i und $m = 0$, so erhalten wir die Neumann'schen Gleichungen. Uebrigens ist klar, daß f , i und m auf jeden Fall als kleine Größen im Vergleich mit A , B , C und a , b , c behandelt werden können, denn da die Function I' und ebenso F' sich nur wenig mit der Richtung ändert, so muß sie aus einem constanten Theile und einem von α , β , γ abhängigen Theile zusammengesetzt sein, wo der letztere gegen den ersteren unbedeutend ist; in den Integralformeln für f , i und m verschwindet aber der constante Theil, während er in den übrigen Größen A, B, C

und a, b, c bleibt. Aus derselben Betrachtung geht auch hervor, daß die Differenzen zwischen A, B und C , so wie zwischen a, b und c gegen diese Größen selbst unbedeutend sind.

§ 45. Es kommt jetzt nur darauf an, die Gleichungen (III) zu integrieren, das heißt die Verrückungen u, v, w als solche Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t zu bestimmen, daß sie diesen Gleichungen entsprechen, und zugleich die Bedingungen für den ursprünglichen Zustand des Mediums erfüllen. Dieses Problem in seiner Allgemeinheit zu lösen, würde mit unüberwindlichen analytischen Schwierigkeiten verknüpft sein, und wenn wir auch bloß das Gesetz der Fortpflanzung der von einem Punkte ausgehenden Erschütterungen aus ihnen entwickeln wollten, was als das Grundproblem der Theorie der Lichtwellen angesehen werden muß, so würde doch die Integration nach vier Veränderlichen, wenigstens bis jetzt noch, die Kräfte der Analysis übersteigen. Es ist daher für die Lichttheorie von der größten Wichtigkeit, daß sich, zu Folge des Fresnel'schen Satzes, die ganze Aufgabe auf die Untersuchung der Fortpflanzung unbegrenzter Wellenebenen reducirt, und wir also bei unserer Untersuchung von der Annahme ausgehen können, daß, wenn man sich das Medium in lauter parallele Ebenen getheilt denkt, die ursprünglichen Verrückungen für alle in einer Ebene liegenden Elemente der Größe und Richtung nach dieselben sind. Hieraus geht von selbst hervor, daß dasselbe auch für die Verrückungen zu jeder Zeit der Fall sein muß, indem kein Grund dazu vorhanden ist, daß je eine Differenz zwischen den Verrückungen der in einer Ebene liegenden Elemente eintreten sollte. Bezeichnen wir somit die Cosinusse der Winkel, welche die auf allen diesen Ebenen senkrechte Linie mit den drei Hauptaxen bildet, durch α, β, γ (diese Buchstaben haben also von nun an eine andere Bedeutung als früher), und die Entfernung derjenigen Ebene, in welcher der Punkt x, y, z liegt, vom Mittelpunkte des Axensystems durch p , so werden die Verrückungen dieses Punktes in der Richtung der drei Axen, die, wie früher, u, v, w heißen sollen, offenbar nur Functionen von p und der Zeit t sein. Da nun in diesem Falle, weil $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$, die zweiten Differentiale der Verrückungen folgende Werthe haben:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2 u}{dp^2}, \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \beta^2 \frac{d^2 u}{dp^2}, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \gamma^2 \frac{d^2 u}{dp^2}, \quad \frac{d^2 u}{dydz} = \beta\gamma \frac{d^2 u}{dp^2}, \quad \frac{d^2 u}{dzdx} = \gamma\alpha \frac{d^2 u}{dp^2}, \quad \frac{d^2 u}{dxdy} = \alpha\beta \frac{d^2 u}{dp^2}$$

und ebenso für v und w , so nehmen die Gleichungen (III) diese Form an:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dt^2} &= (A\alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2 + 2m\gamma\alpha)\frac{d^2 u}{dp^2} + (2c\alpha\beta + 2f\beta\gamma)\frac{d^2 v}{dp^2} + (2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + f\beta^2 + i\gamma^2)\frac{d^2 w}{dp^2} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= (2c\alpha\beta + 2f\beta\gamma)\frac{d^2 u}{dp^2} + (c\alpha^2 + B\beta^2 + a\gamma^2 + 2f\gamma\alpha)\frac{d^2 v}{dp^2} + (2a\beta\gamma + 2f\alpha\beta)\frac{d^2 w}{dp^2} \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= (2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + f\beta^2 + i\gamma^2)\frac{d^2 u}{dp^2} + (2a\beta\gamma + 2f\alpha\beta)\frac{d^2 v}{dp^2} + (b\alpha^2 + a\beta^2 + C\gamma^2 + 2i\gamma\alpha)\frac{d^2 w}{dp^2}\end{aligned}$$

Wir wollen nun nach Neumann's Vorgange annehmen, daß die Verrückungen u , v , w Functionen von der Form sind:

$$u = \xi \varphi(p + \mu t), \quad v = \eta \varphi(p + \mu t), \quad w = \zeta \varphi(p + \mu t),$$

wo ξ , η , ζ (auch in einer andern Bedeutung als früher gebraucht) und μ constante Gröfsen sind. Durch die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen, verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\begin{aligned}\xi \mu^2 &= (A\alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2 + 2m\gamma\alpha)\xi + (2c\alpha\beta + 2f\beta\gamma)\eta + (2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + f\beta^2 + i\gamma^2)\zeta \\ \eta \mu^2 &= (2c\alpha\beta + 2f\beta\gamma)\xi + (c\alpha^2 + B\beta^2 + a\gamma^2 + 2f\gamma\alpha)\eta + (2a\beta\gamma + 2f\alpha\beta)\zeta \\ \zeta \mu^2 &= (2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + f\beta^2 + i\gamma^2)\xi + (2a\beta\gamma + 2f\alpha\beta)\eta + (b\alpha^2 + a\beta^2 + C\gamma^2 + 2i\gamma\alpha)\zeta\end{aligned}\quad (IV)$$

Die Function φ ist aus ihnen ganz verschwunden und bleibt somit willkürlich, während die Constanten ξ , η , ζ und μ durch diese Gleichungen bestimmt werden, und da nur das Verhältniß der Gröfsen ξ , η , ζ durch dieselben gegeben ist, so können wir überdies noch $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ setzen.

Es ist dann ersichtlich, daß die Gleichungen (IV) identisch sind mit denen, welche die Gröfse und Richtung der Hauptaxen eines Ellipsoids bestimmen, vorausgesetzt, daß dessen Gleichung diese ist:

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qzx + 2Rxy = 0,$$

wo wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}A\alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2 + 2m\gamma\alpha &= L, \quad c\alpha^2 + B\beta^2 + a\gamma^2 + 2f\gamma\alpha = M, \quad b\alpha^2 + a\beta^2 + C\gamma^2 + 2i\gamma\alpha = N, \\ 2a\beta\gamma + 2f\alpha\beta &= P, \quad 2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + f\beta^2 + i\gamma^2 = Q, \quad 2c\alpha\beta + 2f\beta\gamma = R\end{aligned}\quad (V)$$

gesetzt haben, und daß $\frac{1}{\mu}$ eine Hauptaxe desselben bezeichnet, während ξ , η , ζ die Cosinusse der Winkel sind, welche diese Axe mit den drei Coordinatenaxen bildet. Hieraus folgt, daß die Gleichungen (IV) für μ sechs reelle Werthe gehen, die sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheiden, und wenn wir diese Werthe durch $\pm \mu$; $\pm \mu'$ und $\pm \mu''$ bezeichnen, und die entsprechenden Werthe von ξ , η , ζ durch ξ , η , ζ ; ξ' , η' , ζ' und ξ'' , η'' , ζ'' , zwischen letzteren, aufser den Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1, \quad (\text{VI})$$

auch diese $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0, \quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$

Statt haben, weil die Hauptaxen eines Ellipsoids auf einander senkrecht stehen. Die Gleichung für μ ist dann bekanntlich diese:

$$\mu^6 - \mu^4(L + M + N) + \mu^2(MN + NL + LM - P^2 - Q^2 - R^2) - (LMN + 2PQR - LP^2 - MQ^2 - NR^2) = 0, \quad (\text{VII})$$

und das Verhältniß der Größen ξ, η, ζ wird durch die Gleichungen (IV) bestimmt, die wir unter der Form

$$(L - \mu^2)\xi + R\eta + Q\zeta = 0, \quad R\xi + (M - \mu^2)\eta + P\zeta = 0, \quad Q\xi + P\eta + (N - \mu^2)\zeta = 0 \quad (\text{VIII})$$

darstellen können, und in denen wir nur μ' oder μ'' an die Stelle von μ zu setzen brauchen, um das Verhältniß von $\xi' : \eta' : \zeta'$ oder von $\xi'' : \eta'' : \zeta''$ zu erhalten.

§ 46. Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs wenn wir mit $\phi, \psi, \phi', \psi', \phi'', \psi'',$ irgend welche willkürliche Functionen bezeichnen, den Gleichungen (III) durch folgende Werthe für die Verrückungen u, v, w genügt werden kann:

$$\begin{aligned} u &= \xi[\phi(p - \mu t) + \psi(p + \mu t)] + \xi'[\phi(p - \mu' t) + \psi(p + \mu' t)] + \xi''[\phi(p - \mu'' t) + \psi(p + \mu'' t)] \\ v &= \eta[\phi(p - \mu t) + \psi(p + \mu t)] + \eta'[\phi(p - \mu' t) + \psi(p + \mu' t)] + \eta''[\phi(p - \mu'' t) + \psi(p + \mu'' t)] \\ w &= \zeta[\phi(p - \mu t) + \psi(p + \mu t)] + \zeta'[\phi(p - \mu' t) + \psi(p + \mu' t)] + \zeta''[\phi(p - \mu'' t) + \psi(p + \mu'' t)] \end{aligned} \quad (\text{IX})$$

indem bei der Substitution derselben der von jeder Function abhängige Theil für sich vermöge der Gleichungen (IV) verschwindet; und da wir in ihnen sechs willkürliche Functionen haben, so werden diese Ausdrücke die vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichungen (III) sein.

Die willkürlichen Functionen $\phi, \psi, \phi,$ etc. müssen so bestimmt werden, dafs die Verrückungen dem ursprünglichen Zustande des Mediums entsprechen. Es seien also U, V, W die ursprünglichen Verrückungen irgend eines Elements in den Richtungen der drei Coordinatenaxen, und U', V', W' die ursprünglichen Geschwindigkeiten in denselben Richtungen, so sind diese Größen nur Functionen von p , zu Folge der Annahme, dafs der ursprüngliche Zustand für alle Elemente, die in einer auf der durch die Cosinusse α, β, γ bestimmten Richtung senkrechten Ebene liegen, derselbe sei.

Da nun U, V, W, U', V', W' respective die Werthe von $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ für die Zeit $t = 0$ sind, so haben wir:

$$U = \xi(\phi p + \psi p) + \xi'(\phi, p + \psi, p) + \xi''(\phi_{,,} p + \psi_{,,} p),$$

$$V = \eta(\phi p + \psi p) + \eta'(\phi, p + \psi, p) + \eta''(\phi_{,,} p + \psi_{,,} p),$$

$$W = \zeta(\phi p + \psi p) + \zeta'(\phi, p + \psi, p) + \zeta''(\phi_{,,} p + \psi_{,,} p),$$

und wenn wir die derivirten Functionen von ϕ, ψ, ϕ, ψ , etc. durch $\phi', \psi', \phi', \psi'$, etc. bezeichnen:

$$-U' = \xi\mu(\phi'p - \psi'p) + \xi'\mu'(\phi', p - \psi', p) + \xi''\mu''(\phi_{,,}p - \psi_{,,}p),$$

$$-V' = \eta\mu(\phi'p - \psi'p) + \eta'\mu'(\phi', p - \psi', p) + \eta''\mu''(\phi_{,,}p - \psi_{,,}p),$$

$$-W' = \zeta\mu(\phi'p - \psi'p) + \zeta'\mu'(\phi', p - \psi', p) + \zeta''\mu''(\phi_{,,}p - \psi_{,,}p).$$

Wir finden hieraus mit Berücksichtigung der Gleichungen (VI)

$\phi p + \psi p = \xi U + \eta V + \zeta W$ und $\phi'p - \psi'p = -\frac{1}{\mu}(\xi U' + \eta V' + \zeta W')$,
und durch Integration der letzteren Gleichung:

$$\phi p - \psi p = -\frac{1}{\mu}(\xi \int U' dp + \eta \int V' dp + \zeta \int W' dp),$$

so dafs uns die Functionen ϕp und ψp durch ihre Summe und Differenz gegeben sind.

Verfahren wir auf dieselbe Weise auch mit der übrigen Function, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi p &= \frac{1}{2} \left[\xi U + \eta V + \zeta W - \frac{1}{\mu} (\xi \int U' dp + \eta \int V' dp + \zeta \int W' dp) \right] \\ \psi p &= \frac{1}{2} \left[\xi U + \eta V + \zeta W + \frac{1}{\mu} (\xi \int U' dp + \eta \int V' dp + \zeta \int W' dp) \right] \\ \phi, p &= \frac{1}{2} \left[\xi' U + \eta' V + \zeta' W - \frac{1}{\mu} (\xi' \int U' dp + \eta' \int V' dp + \zeta' \int W' dp) \right] \\ \psi, p &= \frac{1}{2} \left[\xi' U + \eta' V + \zeta' W + \frac{1}{\mu} (\xi' \int U' dp + \eta' \int V' dp + \zeta' \int W' dp) \right] \\ \phi_{,,} p &= \frac{1}{2} \left[\xi'' U + \eta'' V + \zeta'' W - \frac{1}{\mu} (\xi'' \int U' dp + \eta'' \int V' dp + \zeta'' \int W' dp) \right] \\ \psi_{,,} p &= \frac{1}{2} \left[\xi'' U + \eta'' V + \zeta'' W + \frac{1}{\mu} (\xi'' \int U' dp + \eta'' \int V' dp + \zeta'' \int W' dp) \right] \end{aligned} \quad (X)$$

durch welche Gleichungen uns die sechs Functionen $\phi, \psi, \phi', \psi', \phi'', \psi''$, etc. ihrer Natur nach, dem ursprünglichen Zustande des Mediums entsprechend, bestimmt sind.

Wir wollen nun annehmen, dafs ursprünglich das ganze Medium in Ruhe sei, und nur die Elemente zwischen einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden und auf der durch die Cosinusse α, β, γ bestimmten Richtung senkrechten Ebene, und einer ihr parallelen nur um die sehr kleine Gröfse ϵ von ihr abstehenden Ebene gewisse Verrückungen erfahren haben und mit gewissen Geschwindigkeiten behaftet seien,

so dafs die Gröfsen U, V, W, U', V', W' für alle Werthe von p , welche nicht zwischen 0 und ϵ liegen, $= 0$ sind. Es werden dann, wie aus den Gleichungen (X) hervorgeht, die Functionen ϕ, ψ, ϕ , etc. die Eigenschaft haben, dafs sie nur, wenn die unter dem Functionszeichen enthaltene Gröfse zwischen 0 und ϵ liegt, veränderlich sind, für alle aufser diesen Grenzen liegenden Werthe aber constant bleiben. Da dasselbe also auch für die Verrückungen u, v, w gelten mufs, welche aus diesen Functionen zusammengesetzt sind, so werden zu einer gewissen Zeit t nur die Elemente, welche innerhalb der den Werthen

$p = \mu t$	und	$p = \mu t + \epsilon$
$p = \mu' t$	„	$p = \mu' t + \epsilon$
$p = \mu'' t$	„	$p = \mu'' t + \epsilon$
$p = -\mu t + \epsilon$	„	$p = -\mu t$
$p = -\mu' t + \epsilon$	„	$p = -\mu' t$
$p = -\mu'' t + \epsilon$	„	$p = -\mu'' t$

entsprechenden Ebenen liegen, in Bewegung sein. Und da diese Bewegungen nach Verlauf einer gewissen Zeit (sobald nämlich die Unterschiede zwischen $\mu t, \mu' t, \mu'' t$ gröfser als ϵ geworden sind) ganz von einander abgesondert geschehen, so werden sich sechs Wellenebenen, die der ursprünglichen Ebene der Verrückungen parallel sind, mit gleichförmigen Geschwindigkeiten durch das Medium verbreiten; drei auf der positiven Seite mit den Geschwindigkeiten μ, μ', μ'' , drei auf der negativen Seite mit den Geschwindigkeiten $-\mu, -\mu', -\mu''$. Wenn nun die Elemente, von denen die Bewegungen ausgehen, auf einander folgende Verrückungen auf die eine und andere Seite ihrer Gleichgewichtslage erfahren, oder in Schwingungen begriffen sind, so werden auch in den durch das ganze Medium sich verbreitenden Wellenebenen entgegengesetzte Verrückungen auf einander folgen, wobei sich, wie man leicht übersieht, die constanten Verrückungen aufheben, d. h. die Elemente werden auch in den fortschreitenden Wellenebenen Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage vollziehen.

Betrachten wir jede dieser Wellenebenen für sich, und berücksichtigen nur die drei auf der positiven Seite liegenden, so haben wir für die in jeder derselben geschehenden Verrückungen folgende Gleichungen:

Erste Wellenebene.	Zweite Wellenebene.	Dritte Wellenebene.
$u = \xi \phi(p - \mu t)$	$u = \xi' \phi_1(p - \mu' t)$	$u = \xi'' \phi_{11}(p - \mu'' t)$
$v = \eta \phi(p - \mu t)$	$v = \eta' \phi_1(p - \mu' t)$	$v = \eta'' \phi_{11}(p - \mu'' t)$
$w = \zeta \phi(p - \mu t)$	$w = \zeta' \phi_1(p - \mu' t)$	$w = \zeta'' \phi_{11}(p - \mu'' t)$

Hier sind offenbar die Gröfsen $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ und ξ'', η'', ζ'' die Cosinuse der Winkel zwischen den Coordinatenaxen und den Richtungen, nach welchen die Verschiebungen der Elemente in der ersten, zweiten und dritten Wellenebene geschehen, und nehmen wir also auf die Gleichungen (VI) Rücksicht, so sind wir zu dem Resultate gelangt: dafs in jedem krystallinischen Medium von einer ursprünglichen Wellenebene nach einer Seite hin drei Wellenebenen ausgehen, die mit drei verschiedenen gleichförmigen Geschwindigkeiten fortschreiten und in denen die Schwingungen nach drei auf einander senkrechten Richtungen geschehen, und zwar so, dafs sowohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der drei Wellenebenen als auch die Richtungen ihrer Schwingungen von den Verrückungen der Elemente in der ursprünglichen Wellenebene ganz unabhängig sind, und nur durch die Natur des Mediums und durch die Lage der Wellenebenen in demselben bestimmt werden. Wenn ich sage, in jedem krystallinischen Medium, so stütze ich mich darauf, dafs alle bis jetzt gefundenen Resultate, wie man sich leicht davon überzeugen kann, auch dann gelten, wenn alle in den Formeln (II) für die Druckkräfte vorkommenden Constanten beibehalten werden.

§ 47. Wir haben nun die Gleichungen (VII) und (VIII), durch welche uns die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenebenen, so wie die Richtungen der Schwingungen in denselben bestimmt werden, genauer zu discutiren. Hierbei wollen wir zuerst den Fall behandeln, wo die Constanten f, i und $m = 0$ sind, wo wir also ein krystallinisches Medium haben, das durch drei auf einander senkrechte Ebenen symmetrisch getheilt wird, und unser Axensystem zugleich mit dem krystallographischen Axensystem desselben zusammenfällt. Für diesen Fall nehmen die in den Gleichungen (VII) und (VIII) vorkommenden Gröfsen L, M , etc. folgende Werthe an

$$L = A\alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2, \quad M = c\alpha^2 + B\beta^2 + a\gamma^2, \quad N = b\alpha^2 + a\beta^2 + C\gamma^2, \\ P = 2a\beta\gamma, \quad Q = 2b\gamma\alpha, \quad R = 2c\alpha\beta.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = D$, $(b+c)\alpha^2 + (c+a)\beta^2 + (a+b)\gamma^2 = E$, $bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2 = F$,
so läßt sich durch algebraische Umformungen, mit Berücksichtigung der Gleichung
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, leicht zeigen, dafs:

$$L + M + N = D + E$$

$$\begin{aligned} MN + NL + LM - P^2 - Q^2 - R^2 = & DE + F + \beta^2\gamma^2(BC - aB - aC - 3a^2) \\ & + \gamma^2\alpha^2(CA - bC - bA - 3b^2) \\ & + \alpha^2\beta^2(AB - cA - cB - 3c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LMN + 2PQR - LP^2 - MQ^2 - NR^2 = & DF + \beta^2\gamma^2(c\beta^2 + b\gamma^2)(BC - aB - aC - 3a^2) \\ & + \gamma^2\alpha^2(a\gamma^2 + c\alpha^2)(CA - bC - bA - 3b^2) \\ & + \alpha^2\beta^2(b\alpha^2 + a\beta^2)(AB - cA - cB - 3c^2) \\ & + \alpha^2\beta^2\gamma^2[ABC - 3(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) + 18abc - bc(B+C) - ca(C+A) - ab(A+B)] \end{aligned}$$

Führen wir also zwischen den Constanten A, B, C, a, b, c die drei Bedingungsgleichungen ein:

$$BC - aB - aC - 3a^2 = 0, \quad CA - bC - bA - 3b^2 = 0, \quad AB - cA - cB - 3c^2 = 0, \quad (\text{XI})$$

so geht die Gleichung (VII) für den Fall, dafs eine der Gröfsen α, β , oder $\gamma = 0$ ist, d. h. die Wellenebenen einer der Hauptaxen parallel sind, indem auch das in $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ multiplicirte Glied verschwindet, in diese über:

$$\mu^6 - \mu^4(D + E) + \mu^2(DE + F) - DF = 0,$$

welche sich in die beiden Factoren $\mu^2 - D = 0$ und $\mu^2 - E\mu^2 + F = 0$ zerlegen läßt; für den Fall gehen also aus der Gleichung (VII) diese beiden hervor:

$$\mu^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = 0,$$

$$\mu^4 - [(b+c)\alpha^2 + (c+a)\beta^2 + (a+b)\gamma^2]\mu^2 + (bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2) = 0. \quad (\text{XII})$$

Vernachlässigen wir jedoch die zweiten und höheren Potenzen der Differenzen $b-c$, $c-a$, $a-b$, wozu wir berechtigt sind, weil diese Gröfsen nur von den Differenzen der im krystallinischen Medium nach verschiedenen Richtungen wirkenden Elasticitätskräfte abhängen und mit diesen verschwinden, so ergeben sich aus den Gleichungen (XI) die Werthe:

$$a = \frac{B+C}{6}, \quad b = \frac{C+A}{6}, \quad c = \frac{A+B}{6}, \quad A = \frac{3bc}{a}, \quad B = \frac{3ca}{b}, \quad C = \frac{3ab}{c},$$

durch deren Substitution, wie man augenblicklich übersieht, auch die Gröfse

$$ABC - 3(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) + 18abc - bc(B+C) - ca(C+A) - ab(A+B)$$

verschwindet. Unter der Voraussetzung also, daß die Function F' (durch diese wird nämlich die Abhängigkeit der Molekularkraft von der Richtung, nach welcher sie im krystallinischen Medium wirkt, ausgedrückt) von der Natur ist, daß die Gleichungen (XI) zwischen den Constanten A, B, C, a, b, c Statt haben, und mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von $b-c$, $c-a$ und $a-b$, geht die Gleichung (VII) für alle Fälle, d. h. welche Lage auch die Wellenebenen im krystallinischen Medium haben mögen, in die beiden Gleichungen (XII) über.

§ 48. Die eine der drei Wellenebenen hat also immer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}$; wir wollen untersuchen, nach welcher Richtung die Schwingungen in dieser Welle geschehen. Zu diesem Zwecke bemerke ich, daß aus den Gleichungen (VIII) sich allgemein folgendes Verhältniß für die Größen ξ, η, ζ , durch welche die Richtung der Schwingungen bestimmt wird, ergibt:

$$\xi : \eta : \zeta = [PQ - R(N - \mu^2)] : [(N - \mu^2)(L - \mu^2) - Q^2] : [QR - P(L - \mu^2)].$$

Setzen wir hierin $\mu^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$ und substituiren für L, N, P, Q, R ihre Werthe, so wie für A, B, C respective $\frac{3bc}{a}$, $\frac{3ca}{b}$, $\frac{3ab}{c}$, so erhalten wir nach den gehörigen Reductionen und mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von $b-c$, $c-a$ und $a-b$:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha \left[1 - \frac{3(a-b)}{2b} \beta^2 + \frac{3(c-a)}{2b} \gamma^2 \right], \\ \eta &= \beta \left[1 - \frac{3(b-c)}{2b} \gamma^2 + \frac{3(a-b)}{2b} \alpha^2 \right], \\ \zeta &= \gamma \left[1 - \frac{3(c-a)}{2b} \alpha^2 + \frac{3(b-c)}{2b} \beta^2 \right],\end{aligned}$$

welche Werthe zugleich der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ entsprechen. Wir sehen hieraus, daß das Verhältniß $\xi : \eta : \zeta$ dem Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ sehr nahe kommt, indem der Unterschied nur von der Ordnung der Differenzen $b-c$, $c-a$, $a-b$ ist, oder was dasselbe sagen will, daß die Richtung der Schwingungen in der mit der Geschwindigkeit $\sqrt{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}$ fortschreitenden Wellenebene nahezu mit der Richtung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit zusammenfällt, woraus dann von selbst hervorgeht, daß in den beiden anderen Wellenebenen die Schwingungen nahezu senkrecht gegen die Richtung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit geschehen. Da wir nun

wegen der Fähigkeit des Lichts, polarisirt zu werden, eine Welle, die ihre Schwingungen in der Richtung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit vollzieht, nicht als eine Licht erzeugende ansehen können, so müssen wir in der Lichttheorie die erste Welle unberücksichtigt lassen, und sind somit zu dem Resultate gelangt, dafs in einem krystallinischen Medium, das sich durch drei auf einander senkrechte Ebenen symmetrisch theilen läfst, nach jeder Richtung im Allgemeinen zwei Lichtwellenebenen fortschreiten, für welche das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch die Gleichung: 2

$$\mu^4 - [(b+c)\alpha^2 + (c+a)\beta^2 + (a+b)\gamma^2]\mu^2 + (bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2) = 0 \quad (\text{XIII})$$
 gegeben ist. Dieses Resultat ist durchaus mit dem der Fresnel'schen Theorie übereinstimmend, wenn wir nur die Gröfsen \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c} an die Stelle seiner Elasticitätsachsen setzen.

Es ist bemerkenswerth, dafs sich nicht dieselbe Uebereinstimmung in der Bestimmung der Richtungen zeigt, nach welchen die Schwingungen in den beiden Lichtwellenebenen geschehen. Betrachten wir den besonderen Fall, dafs die Wellenebenen einer der Haupttaxen parallel sind, z. B. der Axe x , so brauchen wir nur $\alpha = 0$ zu setzen, wodurch die Gleichung (XIII) in diese übergeht:

$$\mu^4 - (c\beta^2 + b\gamma^2 + a)\mu^2 + a(c\beta^2 + b\gamma^2) = 0,$$

welche in die beiden Factoren

$$\mu^2 - a = 0 \quad \text{und} \quad \mu^2 - (c\beta^2 + b\gamma^2) = 0$$

zerfällt. Wenn also die Lichtwellenebenen sich nach einer der Hauptebene yz parallelen Richtung bewegen, so ist die Geschwindigkeit der einen für alle diese Richtungen constant, nämlich $= \sqrt{a}$, während die Geschwindigkeit der anderen den veränderlichen Werth $\sqrt{c\beta^2 + b\gamma^2}$ hat, was bekanntlich sowohl mit der Fresnel'schen Theorie als mit der Erfahrung im Einklange ist. Ermitteln wir jedoch die Richtung, in welcher die Schwingungen der mit der veränderlichen Geschwindigkeit fortschreitenden Wellenebene geschehen, indem wir in den Gleichungen (VIII), welche für $\alpha = 0$ die Form

$$(c\beta^2 + b\gamma^2 - \mu^2)\xi = 0, \quad (B\beta^2 + a\gamma^2 - \mu^2)\eta + 2a\beta\gamma\zeta = 0, \quad 2a\beta\gamma\eta + (a\beta^2 + C\gamma^2 - \mu^2)\zeta = 0,$$

annehmen, $\mu^2 = c\beta^2 + b\gamma^2$ setzen, so finden wir für dieselbe $\xi : \eta : \zeta = 1 : 0 : 0$. Die Richtung der Schwingungen in dieser Wellenebene ist also constant, nämlich der

Axe x parallel, während nach der Fresnel'schen Theorie gerade die mit constanter Geschwindigkeit fortschreitende Wellenebene auch ihre Schwingungen in einer constanten Richtung vollzieht. Wenn demnach die Resultate der hier dargelegten Neumann'schen Theorie mit der Erfahrung übereinstimmen sollen, so muß angenommen werden, daß die Polarisationssebene einer Lichtwelle mit der Richtung ihrer Schwingungen zusammenfällt, und nicht, wie die Fresnel'sche Theorie es verlangt, auf derselben senkrecht steht.

§ 49. In der Gleichung (XIII), die wir auch unter der Form

$$\frac{\alpha^2}{\mu^2 - a} + \frac{\beta^2}{\mu^2 - b} + \frac{\gamma^2}{\mu^2 - c} = 0 \quad (1)$$

darstellen können, ist das Gesetz für die Bewegung unbegrenzter Lichtwellenebenen enthalten, indem ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit μ durch diese Gleichung als Function der Größen α , β , γ , oder als abhängig von der Richtung ihrer Bewegung bestimmt wird. Nach dem Fresnel'schen Satze nun können wir aus derselben auch das Gesetz für die Fortpflanzung der von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtundulationen oder die Form der Lichtwellenfläche ableiten, indem diese die Enveloppe der von dem leuchtenden Punkte aus nach allen Richtungen hin sich gleichzeitig verbreitenden Wellenebenen ist. Die analytischen Schwierigkeiten, welche mit der Auffindung der Gleichung dieser Enveloppe verknüpft sind, ließen Fresnel an der directen Lösung der Aufgabe verzweifeln, doch gelangte er auf indirectem Wege zu dieser Gleichung, von deren Richtigkeit er sich durch viele mühsame Rechnungen überzeugte. Ampère hat der Lösung dieser Aufgabe ein Memoire gewidmet, das in den Annales de Chim. et de Phys. An. 1828. T. XXXIX. enthalten ist, in welchem jedoch die zur Auffindung der Gleichung erforderlichen Eliminationen einen ganzen Bogen füllen. Es ist mir gelungen, auf einem kürzeren Wege zu diesem Ziele zu gelangen, und da die Gleichung der Lichtwellenfläche sich dabei unter einer sehr einfachen Form darbietet, an die sich manche interessante Betrachtungen anschließen lassen, so halte ich es nicht für überflüssig, mein Eliminationsverfahren hier auseinanderzusetzen.

Legen wir den Mittelpunkt des Axensystems in den leuchtenden Punkt, so ist die Gleichung einer Wellenebene diese:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu, \quad (2)$$

in welcher μ zu Folge der Gleichung (1) eine Function von α , β , γ , und γ wiederum durch die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (3)$$

eine Function von α und β ist. Um also die Gleichung der Enveloppe der Wellenebene zu finden, müßten wir die partiellen Differentiale der Gleichung (2) in Bezug auf α und β bilden, und aus den hierdurch entstandenen Gleichungen in Verbindung mit (1), (2) und (3) die Größen α , β , γ und μ eliminiren. Setzen wir der Kürze halber

$$\frac{\alpha^2}{(\mu^2 - a)^2} + \frac{\beta^2}{(\mu^2 - b)^2} + \frac{\gamma^2}{(\mu^2 - c)^2} = k, \quad (4)$$

so giebt die Differentiation der Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\alpha}{\mu^2 - a} d\alpha + \frac{\beta}{\mu^2 - b} d\beta + \frac{\gamma}{\mu^2 - c} d\gamma - k\mu d\mu = 0 \quad \text{und} \quad x d\alpha + y d\beta + z d\gamma = d\mu,$$

woraus wir durch Elimination von $d\mu$ erhalten:

$$\left(\frac{\alpha}{\mu^2 - a} - k\mu x\right) d\alpha + \left(\frac{\beta}{\mu^2 - b} - k\mu y\right) d\beta + \left(\frac{\gamma}{\mu^2 - c} - k\mu z\right) d\gamma = 0.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit $\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$, müßten wir $d\gamma$ eliminiren, und dann die Coefficienten von $d\alpha$ und $d\beta = 0$ setzen; statt dessen aber können wir auch die erstere mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt zu der letztern addiren, und dann die Coefficienten von $d\alpha$, $d\beta$ und $d\gamma = 0$ setzen, woraus hervorgeht:

$$\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu^2 - a} + 1 \right) - \lambda k \mu x = 0, \quad \beta \left(\frac{\lambda}{\mu^2 - b} + 1 \right) - \lambda k \mu y = 0, \quad \gamma \left(\frac{\lambda}{\mu^2 - c} + 1 \right) - \lambda k \mu z = 0. \quad (5)$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen respective mit α , β , γ und addiren sie, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (1) und (2):

$$1 = \lambda k \mu^2; \quad (6)$$

multipliciren wir sie dagegen respective mit $\frac{\alpha}{\mu^2 - a}$, $\frac{\beta}{\mu^2 - b}$, $\frac{\gamma}{\mu^2 - c}$, so ergiebt sich durch ihre Addition mit Hinzuziehung von (1) und (4):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\alpha x}{\mu^2 - a} + \frac{\beta y}{\mu^2 - b} + \frac{\gamma z}{\mu^2 - c}; \quad (7)$$

addiren wir sie endlich nach der Multiplication mit x , y , z , und setzen $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

so wird zu Folge (2) und (7): $\frac{\lambda}{\mu} + \mu - \lambda k \mu r^2 = 0$, woraus wegen (6) folgt:

$$\lambda = r^2 - \mu^2 \quad (8)$$

Durch die Substitution des so eben für λ gefundenen Werthes in die Gleichungen (5) gehen nun diese, mit Berücksichtigung von (6), in folgende über:

$$\frac{\alpha\mu}{\mu^2 - a}(r^2 - a) - x = 0, \quad \frac{\beta\mu}{\mu^2 - b}(r^2 - b) - y = 0, \quad \frac{\gamma\mu}{\mu^2 - c}(r^2 - c) - z = 0.$$

Diese drei Gleichungen respective mit x, y, z multiplicirt und addirt geben zu Folge (7)

$$\frac{\alpha ax}{\mu^2 - a} + \frac{\beta by}{\mu^2 - b} + \frac{\gamma cz}{\mu^2 - c} = 0, \quad (9)$$

und addiren wir dieselben Gleichungen, nachdem wir sie respective mit $\frac{ax}{r^2 - a}, \frac{by}{r^2 - b}, \frac{cz}{r^2 - c}$ multiplicirt, so erhalten wir mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\frac{ax^2}{r^2 - a} + \frac{by^2}{r^2 - b} + \frac{cz^2}{r^2 - c} = 0, \quad (XIV)$$

welche Gleichung die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ nicht mehr enthält, und somit die gesuchte Gleichung der Enveloppe oder der Lichtwellenfläche ist. In der That läßt sie sich leicht auf die Form bringen

$$r^2(ax^2 + by^2 + cz^2) - a(b+c)x^2 - b(c+a)y^2 - c(a+b)z^2 + abc = 0,$$

wo sie als identisch mit der von Fresnel aufgefundenen Gleichung der Wellenfläche erscheint, wenn man berücksichtigt, daß die Größen a, b, c die Quadratwurzeln aus den Fresnel'schen Elasticitätsaxen sind.

§ 50. Durch die Gleichung der Lichtwellenfläche ist uns zugleich das Gesetz für die Fortpflanzung der Lichtstrahlen gegeben, indem der Radiusvector r die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Strahls in derjenigen Richtung bezeichnet, welche mit den Hauptaxen Winkel, deren Cosinusse $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, bildet. Bezeichnen wir diese Cosinusse durch α', β', γ' , so wird die Gleichung (XIV) diese

$$\frac{a\alpha'^2}{r^2 - a} + \frac{b\beta'^2}{r^2 - b} + \frac{c\gamma'^2}{r^2 - c} = 0, \quad (10)$$

und da sie in r^2 vom zweiten Grade ist, so folgt daraus, daß in jeder Richtung im Allgemeinen zwei Strahlen mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten.

Die Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der Gleichung (1), durch die uns das Gesetz der Fortpflanzung unbegrenzter Wellenebenen gegeben wird, ist in die Augen springend. In der That kann die Gleichung (1) unter die Form gebracht werden:

$$\frac{\frac{1}{a}\alpha^2}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{b}\beta^2}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{b}} + \frac{\frac{1}{c}\gamma^2}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{c}} = 0,$$

in welcher sie vollkommen identisch ist mit der Gleichung (10), wenn wir nur a, b, c und r respective mit $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ und $\frac{1}{\mu}$ vertauschen, woraus hervorgeht, dafs unter derselben Bedingung die Gesetze für die Fortpflanzung der Wellenebenen denen für die Strahlen völlig analog sind.

Da nun die Gesetze für die Fortpflanzung der Lichtstrahlen, wenn wir durch r' und r'' die zwei Geschwindigkeiten derselben in einer gewissen Richtung, und durch u und u' die Winkel zwischen dieser Richtung und den beiden optischen Axen der Strahlen (d. h. den beiden Richtungen, für welche $r' = r''$) bezeichnen, bekanntlich durch folgende Gleichungen auf die einfachste Weise ausgesprochen werden:

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{c} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \sin^2 \frac{u - u'}{2}, \quad \frac{1}{r''^2} = \frac{1}{c} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \sin^2 \frac{u + u'}{2};$$

so werden dagegen, zu Folge des Vorhergehenden, die Gesetze für die Fortpflanzung der Wellenebenen durch die Gleichungen

$$\mu'^2 = c + (a - c) \sin^2 \frac{\nu - \nu'}{2}, \quad \mu''^2 = c + (a - c) \sin^2 \frac{\nu + \nu'}{2}$$

darstellt, in denen μ' und μ'' die Geschwindigkeiten zweier in derselben Richtung fortschreitenden Wellenebenen bezeichnen, und ν und ν' die Winkel zwischen ihrer Normale und den beiden optischen Axen der Wellenebenen (d. h. den beiden Richtungen, in welchen $\mu' = \mu''$).

Diese Bemerkung ist, soviel mir bekannt, noch von keinem Physiker gemacht worden, obgleich sie für die Vergleichung optischer Beobachtungen mit den Gesetzen der doppelten Strahlenbrechung von Wichtigkeit ist, indem wir durch dieselbe der Bestimmung der Lage und Geschwindigkeit der Lichtstrahlen ganz überhoben sind, und es nur mit den Lichtwellenebenen oder den Tangentialebenen der Wellenfläche zu thun haben, welche bei der Brechung dem einfachen Descartischen Gesetze folgen. — In dem zweiten Theile dieser Abhandlung habe ich, bei der Vergleichung meiner Beobachtungen mit der Theorie, von dem so eben Bewiesenen Gebrauch gemacht (siehe § 25).

Es ist übrigens leicht, aus der gegebenen Geschwindigkeit und Lage der Wellenebene die Geschwindigkeit und Richtung des zugehörigen Strahls abzuleiten. Der Werth von k läßt sich aus der Formel (4) berechnen, wenn wir die Gröſsen α , β , γ und μ für die Wellenebene als bekannt voraussetzen. Dann aber haben wir aus (8)

$$\text{und (6)} \quad r^2 = \mu^2 + \frac{1}{k\mu^2},$$

wodurch uns die Geschwindigkeit des Strahls gegeben ist, und aus (5) und (6)

$$\frac{x}{r} = \alpha \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{k\mu^2(\mu^2 - a)} \right], \quad \frac{y}{r} = \beta \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{k\mu^2(\mu^2 - b)} \right], \quad \frac{z}{r} = \gamma \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{k\mu^2(\mu^2 - c)} \right]$$

woraus wir die Richtung des Strahles finden. Aus der ersteren Gleichung ergibt sich noch für den Sinus des Winkels zwischen dem Strahl und der Normale der zugehörigen Wellenebene die elegante Formel $\frac{1}{\mu r \sqrt{k}}$.

§ 54. Schreiten wir nun zu der Untersuchung über die Gesetze der Fortpflanzung der Lichtwellenebenen in solchen krystallinischen Medien, deren Gestalten dem zwei- und eingliedrigen Systeme angehören, für welche also die Constanten f , m und i im Allgemeinen nicht $= 0$ sind. Die Hauptschwierigkeit liegt hier darin, daß über die Lage des Axensystems in Beziehung auf die Axen x und z a priori nichts entschieden ist, indem nur die Axe γ , welche senkrecht auf der die Krystallform symmetrisch theilenden Ebene steht, eine ursprünglich bestimmte Lage hat, für die beiden anderen Axen aber die passendste Lage erst im Verlauf der Untersuchung ermittelt werden kann.

Betrachten wir zuerst den einfachsten Fall, daß die Wellenebenen der die Krystallform symmetrisch theilenden Ebene parallel sind, oder in der Richtung der Axe γ fortschreiten, so haben wir in den Gleichungen (V) nur $\beta = 1$, α und $\gamma = 0$ zu setzen, wodurch $L = c$, $M = B$, $N = a$, $P = 0$, $Q = f$ und $R = 0$ wird, und die Gleichung (VII) geht also in diese über:

$$\mu^6 - \mu^4(B + a + c) + \mu^2[B(a + c) + ac - f^2] - B(ac - f^2) = 0,$$

deren eine Wurzel B ist, während die beiden andern Wurzeln durch die Gleichung

$$\mu^4 - \mu^2(a + c) + ac - f^2 = 0$$

bestimmt werden; ihre Werthe sind also, wenn wir sie durch μ'^2 und μ''^2 bezeichnen:

$$\mu'^2 = \frac{1}{2}(a + c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a - c)^2 + f^2}, \quad \mu''^2 = \frac{1}{2}(a + c) - \sqrt{\frac{1}{4}(a - c)^2 + f^2}.$$

Substituiren wir diese in die Gleichungen (VIII), welche die Form $\xi(c - \mu^2) + \zeta f = 0$, $\eta(B - \mu^2) = 0$, $\xi f + \zeta(a - \mu^2) = 0$ annehmen, so finden wir den Werthen μ' und μ'' entsprechend:

$$\begin{aligned}\xi' : \eta' : \zeta' &= f : 0 : \left[\frac{1}{2}(a-c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2} \right], \\ \xi'' : \eta'' : \zeta'' &= \left[\frac{1}{2}(a-c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2} \right] : 0 : -f.\end{aligned}\tag{XV}$$

Die mit den Geschwindigkeiten μ' und μ'' fortschreitenden Wellenebenen vollziehen ihre Schwingungen nach den durch die Gleichungen (XV) bestimmten Richtungen, und da diese auf der Richtung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit senkrecht stehen, so sind es die beiden Lichtwellenebenen, welchen die Geschwindigkeiten μ' und μ'' angehören.

Untersuchen wir zweitens die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenebenen, welche sich in einer gegen die Axe γ senkrechten Richtung bewegen, so müssen wir in den Gleichungen (V) $\beta = 0$ setzen, wodurch wir erhalten

$$\begin{aligned}L &= A\alpha^2 + b\gamma^2 + 2m\gamma\alpha, & M &= c\alpha^2 + a\gamma^2 + 2f\gamma\alpha, & N &= b\alpha^2 + C\gamma^2 + 2i\gamma\alpha, \\ P &= 0, & Q &= 2b\gamma\alpha + m\alpha^2 + i\gamma^2, & R &= 0,\end{aligned}$$

und die Gleichung (VII) verwandelt sich also in diese:

$$\mu^6 - \mu^4(L + M + N) + \mu^2[M(L + N) + LN - Q^2] - M(LN - Q^2) = 0,$$

deren eine Wurzel M ist. Das Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit μ' der einen Wellenebene ist also durch die Gleichung

$$\mu'^2 = c\alpha^2 + a\gamma^2 + 2f\gamma\alpha\tag{XVI}$$

gegeben, und man überzeugt sich leicht durch die Substitution dieses Werthes in die Gleichungen (VIII), dafs die Schwingungen in derselben nach der Richtung der Axe γ geschehen, so dafs diese eine der beiden Lichtwellen ist. — Wir finden die Richtungen, in welchen die Geschwindigkeit derselben ihr Minimum und Maximum erreicht, indem wir die Gleichung (XVI) in Bezug auf α und γ differentiren, $d\mu = 0$ setzen, und zugleich berücksichtigen, dafs $\alpha d\alpha + \gamma d\gamma = 0$. Es ergibt sich auf diese Weise die Gleichung

$$(a - c)\alpha\gamma + f(a^2 - \gamma^2) = 0,\tag{XVII}$$

aus der wir für das Verhältnifs $\alpha : \gamma$ die beiden Werthe

$f : \left[\frac{1}{2}(a-c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2} \right]$ und $\left[\frac{1}{2}(a-c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2} \right] : -f$ erhalten. Aus der Uebereinstimmung dieser mit den in den Gleichungen (XV) gegebenen Werthen für das Verhältnifs von $\xi' : \zeta'$ und $\xi'' : \zeta''$ folgt, dafs die Rich-

tungen des Minimums und Maximums der veränderlichen Geschwindigkeit in der Hauptebene xz , mit den Richtungen der Schwingungen oder der Polarisation der nach der Axe y sich bewegenden Lichtwellen zusammenfallen. Ueberlegen wir zugleich, dafs in Beziehung auf diese Richtungen die veränderliche Geschwindigkeit in der Hauptebene xz , wie man aus der Gleichung (XVI) leicht ersieht, ganz demselben Gesetze folgt, als in den zwei- und zweigliedrigen Krystallen die veränderliche Geschwindigkeit innerhalb einer Hauptebene in Beziehung auf die in derselben liegenden Hauptaxen, so scheint es am meisten naturgemäfs zu sein, wenn wir eben diese Richtungen, welche durch die Gleichungen (XV) oder (XVI) bestimmt werden, zu den Hauptaxen x und z wählen.

§ 52. Es wird uns in dem Folgenden von Nutzen und auch ausserdem nicht ohne Interesse sein, zu untersuchen, welche Werthe die Constanten A, B, C, a, b, c , etc. durch eine Veränderung der Axen x und z annehmen. Wir wollen den Winkel, welchen die neue Axe x mit der alten Axe x bildet, ϕ nennen, $\cos \phi = p$, $\sin \phi = q$ setzen und die Constanten in Bezug auf das neue Axensystem durch $A', B', C', a',$ etc. bezeichnen; dann lassen sich aus den im § 43 für diese Gröfsen gegebenen Integralformeln ohne grofse Schwierigkeit folgende Werthe für die neuen Constanten finden:

$$\begin{aligned} A' &= p^4 A + 4p^3 q m + 6p^2 q^2 b + 4p q^3 i + q^4 C, & C' &= q^4 A - 4p q^3 m + 6p^2 q^2 b - 4p^3 q i + p^4 C, \\ B' &= B, & a' &= p^2 a - 2p q f + q^2 c, & f' &= p q a + (p^2 - q^2) f - p q c, & c' &= q^2 a + 2p q f + p^2 c, \\ & & b' &= p^2 q^2 A - 2p q (p^2 - q^2) m + (1 - 6p^2 q^2) b + 2p q (p^2 - q^2) i + p^2 q^2 C, & & & & & \text{(XVIII)} \\ & & m' &= -p^3 q A + (p^4 - 3p^2 q^2) m + 3p q (p^2 - q^2) b + (3p^2 q^2 - q^4) i + p q^3 C, \\ & & i' &= -p q^3 A + (3p^2 q^2 - q^4) m - 3p q (p^2 - q^2) b + (p^4 - 3p^2 q^2) i + p^3 q C. \end{aligned}$$

Wir haben somit, wenn wir p und q , mit Berücksichtigung dessen, dafs $p^2 + q^2 = 1$, aus diesen Gleichungen eliminiren, acht Gleichungen zwischen den alten und neuen Constanten, die sich unter folgender Form darstellen lassen:

$$\begin{aligned} 1) B' &= B, & 2) A' + C' + 2b' &= A + C + 2b, & 3) a' + c' &= a + c, & 4) a' c' - f'^2 &= a c - f^2 \\ & & 5) \frac{1}{4} (A' - C')^2 + (m' + i')^2 &= \frac{1}{4} (A - C)^2 + (m + i)^2, \\ & & 6) (A' - C') f' + (a' - c') (m' + i') &= (A - C) f + (a - c) (m + i), \\ & & 7) \frac{1}{28} (A' + C' - 6b')^2 + (m' - i')^2 &= \frac{1}{28} (A + C - 6b)^2 + (m - i)^2, & & & \text{(XIX)} \\ 8) \frac{1}{4} [A' C' - A' b' - C' b' - 3b'^2 + (m' + i')^2]^2 &+ [(A' + b') i' - (C' + b') m']^2 \\ &= \frac{1}{4} [A C - A b - C b - 3b^2 + (m + i)^2]^2 + [(A + b) i - (C + b) m]^2 \end{aligned}$$

Die Form, unter welcher diese Gleichungen hier erscheinen, hat den Vorzug, zu zeigen, daß die acht algebraischen Ausdrücke, welche die eine Seite dieser Gleichungen bilden, so wie alle, die sich aus ihnen zusammensetzen lassen, für alle Axensysteme dieselben Werthe behalten oder constant sind.

Aus dem für die Constante f' gefundenen Ausdrucke: $f' = pqa + (p^2 - q^2)f - pqc$, geht hervor, daß, wenn wir die neue Axe x mit einer jener Richtungen zusammenfallen lassen, die durch (XV) bestimmt sind und in denen die Schwingungen der nach der Axe y fortschreitenden Lichtwellen geschehen, oder wenn wir

$$\frac{q}{p} = \frac{-f}{\frac{1}{2}(a-c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2}}$$

setzen, die Constante $f' = 0$ wird. So also müssen wir das neue Axensystem wählen, daß $f' = 0$ ist, und es lassen sich dann die Werthe der übrigen auf dieses System bezüglichen Constanten mit Hülfe der Gleichungen (XVIII) oder (XIX) durch die ursprünglichen Constanten ausdrücken.

§ 53. Wir wollen nun in Bezug auf dieses neue Axensystem die Gesetze der Bewegung der Wellenebenen erforschen. Lassen wir die Gröfsen α, β, γ jetzt die Cosinusse der Winkel bezeichnen, welche die Normale der Wellenebene mit den drei neuen Axen bildet, so haben wir in den früheren Gleichungen nur an die Stelle der alten Constanten A, B, C, a , etc. die neuen A', B', C', a' , etc. zu setzen, und zugleich $f' = 0$ zu nehmen.

Für die in der Richtung der Axe y fortschreitenden Wellenebenen erhalten wir auf diese Weise, wie sich aus dem Vorhergehenden von selbst versteht, die drei Geschwindigkeiten: $\mu = B', \quad \mu' = a', \quad \mu'' = c',$

von denen die beiden letzteren den beiden Lichtwellenebenen angehören, und diese vollziehen ihre Schwingungen in den Richtungen der neuen Axen x und z . Ich muß bemerken, daß wir aus der dritten und vierten Gleichung (XIX), weil $f' = 0$, für a' und c' die Werthe

$a' = \frac{1}{2}(a+c) + \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2}, \quad c' = \frac{1}{2}(a-c) - \sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + f^2}$
erhalten, was mit dem im § 51 Gefundenen übereinstimmt.

Betrachten wir nun die Wellenebenen, welche der Axe y parallel sind oder nach der in der Hauptebene xz liegenden Richtung fortschreiten, so sind uns die Ge-

geschwindigkeiten derselben, wie wir schon § 51 gefunden haben, durch die Gleichung

$$\mu^6 - \mu^4(L + M + N) + \mu^2[M(L + N) + LN - Q^2] - M(LN - Q^2) = 0$$

gegeben, in welcher jedoch, da $f' = 0$, die Gröfsen L , M , N und Q folgende Werthe haben:

$$L = A'\alpha^2 + b'\gamma^2 + 2m'\gamma\alpha, \quad M = c'\alpha^2 + a'\gamma^2, \quad N = b'\alpha^2 + C'\gamma^2 + 2i'\gamma\alpha, \\ Q = 2b'\gamma\alpha + m'\alpha^2 + i'\gamma^2.$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist M , und wir haben also für die Geschwindigkeit der einen Wellenebene, die wir durch μ' bezeichnen wollen, die Gleichung

$$\mu'^2 = c'\alpha^2 + a'\gamma^2,$$

während uns die Geschwindigkeiten der beiden anderen Wellenebenen durch die Gleichung

$$\mu''^2 - \mu^2(L + N) + LN - Q^2 = 0$$

gegeben sind. Wir wollen die Wurzeln der letzteren mit μ'^2 und μ''^2 bezeichnen und

$$\mu^2 = A'\alpha^2 + C'\gamma^2 + \epsilon, \quad \mu''^2 = b' + \theta$$

setzen, so erhalten wir, indem wir die Summe beider Wurzeln $= L + N$ und ihr Product $= LN - Q^2$ setzen, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von ϵ und θ , so wie von m' und i' die Gleichungen

$$\epsilon + \theta = 2\alpha\gamma(m' + i')$$

$$b\epsilon + (A'\alpha^2 + C'\gamma^2)\theta = \alpha^2\gamma^2(A'C' - A'b' - C'b' - 3b'^2) + 2\alpha\gamma[(A'\alpha^2 - b'\gamma^2)i' + (C'\gamma^2 - b'\alpha^2)m'].$$

Wir müssen also annehmen, daß bei den zwei- und eingliedrigen Krystallen die Constanten A' , C' und b' , die sich auf das Axensystem, für welches $f' = 0$, beziehen, der Bedingungsgleichung $A'C' - A'b' - C'b' - 3b'^2 = 0$

entsprechen, analog denen für die Krystalle des zwei- und zweigliedrigen Systems. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für die Gröfsen ϵ und θ die Werthe:

$$\epsilon = 2\alpha\gamma \frac{(A' + b)m'\alpha^2 + (C' + b')i'\gamma^2}{A'\alpha^2 + C'\gamma^2 - b}, \quad \theta = 2\alpha\gamma \left(m' + i' - \frac{(A' + b)m'\alpha^2 + (C' + b')i'\gamma^2}{A'\alpha^2 + C'\gamma^2 - b} \right).$$

Man überzeugt sich überdiß leicht, daß die Geschwindigkeiten μ' und μ'' den beiden Lichtwellen angehören, indem die Schwingungen für die erstere genau, für die letztere nahezu senkrecht gegen die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit geschehen.

Für die Wellenebenen, welche der neuen Axe x parallel sind, und sich also in einer gegen dieselbe senkrechten Richtung bewegen, erhalten wir, indem $\alpha = 0$ ist, $L = c'\beta^2 + b'\gamma^2$, $M = B'\beta^2 + a'\gamma^2$, $N = a'\beta^2 + C'\gamma^2$, $P = 2a'\beta\gamma$, $Q = i'\gamma^2$, $R = 0$,

und die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derselben wird diese:
 $\mu^6 - \mu^4(L + M + N) + \mu^2(MN + NL + LM - P^2 - Q^2) - (LMN - LP^2 - MQ^2) = 0.$

Nehmen wir für ihre drei Wurzeln folgende Werthe an

$$\mu^2 = B'\beta^2 + C'\gamma^2 + \varepsilon, \quad \mu'^2 = c'\beta^2 + b'\gamma^2 + \theta, \quad \mu''^2 = a' + \kappa,$$

so ergeben sich durch Einführung der Bedingungsgleichung

$$B'C' - B'a' - C'a' - 3a'^2 = 0,$$

und mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε , θ und κ , für diese Größen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{i'^2 \gamma^6 (C' - a')}{[(B' - c')\beta^2 + (C' - b')\gamma^2] (B'\beta^2 + C'\gamma^2 - a')}, \\ \theta &= \frac{i'^2 \gamma^4 [(B' - c')\beta^2 + (a' - b')\gamma^2]}{(a' - c'\beta^2 - b'\gamma^2) [(B' - c')\beta^2 + (C' - b')\gamma^2]}, \\ \kappa &= \frac{i'^2 \gamma^4 \beta^2 (B' - a')}{(a' - c'\beta^2 - b'\gamma^2) (B'\beta^2 - C'\gamma^2 - a')} \end{aligned}$$

Wir dürfen hier, wenigstens in den Ausdrücken für die Größen θ und κ , welche sich auf die Geschwindigkeiten der beiden Lichtwellen beziehen, i'^2 nicht vernachlässigen, weil es die Gröfse $a' - c'\beta^2 - b'\gamma^2$ zum Divisor hat, die nur von der Ordnung der Differenzen zwischen a , b und c ist.

Analog werden auch die Werthe für die Geschwindigkeiten der Wellenebene sein, welche der neuen Axe z parallel sind, wenn wir noch die dritte Bedingungsgleichung:

$$A'B' - A'c' - B'c' - 3c'^2 = 0$$

zwischen den Constanten einführen.

§ 54. In den so eben entwickelten Formeln werden wir mit vollem Rechte die Producte aus den kleinen Größen m' und i' und den Differenzen zwischen a' , b' und c' vernachlässigen können. Setzen wir demnach in den Gliedern, welche mit m' oder i' multiplicirt sind, $a' = c' = b'$, wodurch zu Folge der drei eingeführten Bedingungsgleichungen $A' = B' = C' = 3b'$ wird, so gelangen wir zu folgenden einfacheren Formeln für die Geschwindigkeiten der beiden Lichtwellen, die wir hier allein zu berücksichtigen haben:

$$\begin{aligned} &\text{Für die der Axe } \gamma \text{ parallelen Lichtwellenebenen} \\ \mu'^2 &= a'\gamma^2 + c'\alpha^2, \quad \mu''^2 = b' + 2\alpha\gamma(\alpha^2 - \gamma^2) (i' - m'). \end{aligned}$$

$$\text{Für die der Axe } x \text{ parallelen Lichtwellenebenen} \quad (XX)$$

$$\mu'^2 = c'\beta^2 + b'\gamma^2 - \frac{i'^2 \beta^2 \gamma^4}{a' - c'\beta^2 - b'\gamma^2}, \quad \mu''^2 = a' + \frac{i'^2 \beta^2 \gamma^4}{a' - c'\beta^2 - b'\gamma^2}.$$

Für die der Axe z parallelen Lichtwellenebenen

$$\mu'^2 = b'\alpha^2 + a'\beta^2 - \frac{m'^2\alpha^4\beta^2}{c' - a'\beta^2 - b'\alpha^2}, \quad \mu''^2 = c' + \frac{m'^2\alpha^4\beta^2}{c' - a'\beta^2 - b'\alpha^2}. \quad (\text{XX})$$

Durch diese Formeln sind uns für die Krystalle des zwei- und eingliedrigen Systems die Gesetze der Bewegung der Lichtwellen in den drei Hauptebenen gegeben, nämlich in der den Krystall symmetrisch theilenden Ebene, und in den beiden Polarisationsebenen der Strahlen, welche senkrecht gegen jene durch den Krystall hindurchgehen. Es würde vorläufig noch ohne Interesse sein, auch für andere Richtungen die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen zu untersuchen, indem erst durch Experimente ermittelt werden müßte, ob die Constanten m' und i' nicht für alle Substanzen des zwei- und eingliedrigen Systems verschwinden. — Wir sind jedoch, unter der Voraussetzung, daß dieses nicht der Fall ist, mit Hülfe der gefundenen Formeln im Stande, die Lage der optischen Axen und ihrer Mittellinien für die Krystalle dieses Systems theoretisch zu bestimmen. Beschränken wir uns bei dieser Bestimmung auf den am häufigsten vorkommenden Fall, daß die optischen Axen (ich meine hier immer die Richtungen, in welchen die Wellenebenen eine gleiche Geschwindigkeit haben) in der den Krystall symmetrisch theilenden Ebene oder in unserer Hauptebene xz liegen, so werden uns offenbar diese Richtungen durch die Gleichung

$$a'\gamma^2 - c'\alpha^2 = b' + 2\alpha\gamma(\alpha^2 - \gamma^2)(i' - m')$$

gegeben, wobei vorausgesetzt werden muß, daß b' der GröÙe nach zwischen a' und c' liegt. Bezeichnen wir nun die Werthe von α und γ für die eine optische Axe durch α und γ , für die andere durch α'' und γ'' , und setzen $\frac{a' - b'}{a' - c'} = \cos^2 \omega$, $\frac{b' - c'}{a' - c'} = \sin^2 \omega$, so erhalten wir, wenn $i' - m'$ als kleine GröÙe, selbst im Verhältniß zu den Differenzen zwischen a' , b' und c' behandelt wird, zu Folge vorstehender Gleichung die Formeln

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \omega - \sin \omega \cos 2\omega \frac{i' - m'}{a' - c'}, & \alpha'' &= \cos \omega + \sin \omega \cos 2\omega \frac{i' - m'}{a' - c'}, \\ \gamma &= \sin \omega + \cos \omega \cos 2\omega \frac{i' - m'}{a' - c'}, & \gamma'' &= -\sin \omega + \cos \omega \cos 2\omega \frac{i' - m'}{a' - c'}, \end{aligned}$$

und da die Tangente des Winkels, welchen die Mittellinie der optischen Axen mit der Hauptaxe x bildet, $= \frac{\alpha'' - \alpha}{\gamma'' - \gamma}$, so ergibt sich für diese Tangente die Formel

$$\cos 2\omega \frac{i' - m'}{a' - c'}.$$

Es liefs sich also, wie man aus dieser Formel ersieht, mit Recht erwarten, dafs in der Abweichung der Mittellinien der optischen Axen von den Polarisations Ebenen der senkrecht gegen die symmetrisch theilende Ebene durch den Krystall hindurchgehenden Strahlen sich am stärksten die Differenz zwischen den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems und denen des zwei- und zweigliedrigen aussprechen würde. Wir bemerken zugleich, dafs, wenn sich beim Eisenvitriol keine Differenz zwischen diesen Richtungen zeigte, dieses nicht nothwendig seinen Grund in der verschwindenden Kleinheit der Gröfse $i' - m'$ zu haben brauchte, sondern möglicher Weise auch darin, dafs der Winkel 2ω (welches der Winkel der optischen Axen ist, wenn $i' - m' = 0$) für diese Substanz nahe an 90° liegt. Das einzige hierauf bezügliche Datum, welches ich ausserdem kenne, ist in der Abhandlung von Neumann: Ueber die optischen Eigenschaften der hemiprismatischen Krystalle (Poggendorfs Annalen. 1835. Bd. XXXV. S. 204) angeführt. Es fallen nämlich nach Neumann's Beobachtungen am Gyps die Mittellinien der optischen Axen mit den Polarisations Ebenen der auf der symmetrisch theilenden Ebene senkrechten Strahlen bei einer Temperatur von ungefähr 11° R. zusammen; doch bleibt es unentschieden, ob diese Richtungen nicht bei einer anderen Temperatur von einander abweichen werden, da die Lage der Mittellinien der optischen Axen sich mit der Temperatur ändert. — Dieses letztere Factum selbst wird sich aus der Aenderung der Werthe der Constanten f , i und m beim Temperaturwechsel erklären lassen; bei der Untersuchung hierüber würde es vornehmlich auf die theoretische Bestimmung der termischen Axen in den zum zwei- und eingliedrigen Systeme gehörigen Krystallen ankommen. — Auch die schon an mehreren Krystallen dieses Systems beobachtete Verschiedenheit der beiden optischen Ringsysteme, wenigstens in so weit sie sich auch im homogenen Lichte zeigt, scheint mit unserer Theorie in Uebereinstimmung zu sein, denn die Differenzen zwischen den beiden Geschwindigkeiten der Wellen in der Nähe der einen und der anderen optischen Axe folgen nach unseren Formeln nicht demselben Gesetze. Doch die weitere Untersuchung über diese Gegenstände soll einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben; erst mufs die Beobachtung über die Existenz der Constanten i' und m' entschieden haben.

